ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 26 октября 2008 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. На шахматной доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 находится хотя бы один ферзь.

(А.Грибалко)

6 2. Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм?

(Д.Баранов)

6 3. Сережа нарисовал треугольник ABC и провел в нем медиану AD. Затем он сообщил Илье, какова в этом треугольнике длина медианы AD и какова длина стороны AC. Илья, исходя из этих данных, доказал утверждение: угол CAB тупой, а угол DAB острый. Найдите отношение AD/AC (и докажите для любого треугольника с таким отношением утверждение Ильи).

(И.Богданов)

6 4. Барон Мюнхгаузен рассказывал, что у него есть карта страны Оз с пятью городами. Каждые два города соединены дорогой, не проходящей через другие города. Каждая дорога пересекает на карте не более одной другой дороги (и не более одного раза). Дороги обозначены желтым или красным (по цвету кирпича, которым вымощены), и при обходе вокруг каждого города (по периметру) цвета выходящих из него дорог чередуются. Могут ли слова барона быть правдой?

(А.Грибалко)

8 5. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Докажите, что $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) < 2$.

(С.Слободник)

9 6. На сторонах AC и BC неравнобедренного треугольника ABC во внешнюю сторону построены как на основаниях равнобедренные треугольники $AB'C$ и $CA'B$ с одинаковыми углами при основаниях, равными φ. Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку $A'B'$, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке C_1. Найдите угол AC_1B.

(А.Заславский)

7. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности

5 а) число 1 встречается бесконечно много раз;

5 б) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

(А.Заславский)

ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 26 октября 2008 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Квадратная доска разделена 7-ю прямыми, параллельными одной стороне доски, и 7-ю прямыми, параллельными другой стороне доски, на 64 прямоугольные клетки, которые покрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке. Расстояния между соседними прямыми не обязательно одинаковы, поэтому клетки могут быть разных размеров. Известно, однако, что отношение площади любой белой клетки к площади любой черной клетки не больше 2. Найдите наибольшее возможное отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных. (Ю.Чеканов)
6	2. Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань? (И.Богданов)
6	3. На столе лежат $N > 2$ кучек по одному ореху в каждой. Двое ходят по очереди. За ход нужно выбрать две кучки, где числа орехов взаимно просты, и объединить эти кучки в одну. Выиграет тот, кто сделает последний ход. Для каждого N выясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл его противник. (А.Шаповалов)
6	4. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 — это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже трапеция. (И.Богданов)
8	5. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности каждое натуральное число встречается бесконечно много раз. (Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...) (А.Заславский)
9	6. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что у графика $y = P(x)$ есть центр симметрии. (А.Шаповалов)
	7. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем
5	а) после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке);
5	б) после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)? (Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.) (В.Клепцын)