27 Турнир Городов - решения задач. Осенний тур, основной вариант, 8-11 классы

8-9 классы

Задача 1. Заметим, что $n = 119\ldots911$, где вместо многоточия стоит произвольное количество девяток, является палиндромом. Число $n + 110$ имеет вид $120\ldots021$, где вместо многоточия стоит некоторое количество нулей, и, очевидно, также является палиндромом. Осталось заметить, что чисел n указанного вида можно предъявить бесконечно много.

Примечание. Среди чисел, в которых есть хотя бы четыре знака, подходят только числа вида $n = ab\ldots ba$, где a — произвольная цифра от 1 до 9, b — произвольная цифра от 0 до 8, а вместо многоточия стоит произвольное количество цифр 9. Существуют также специальные варианты с количеством знаков от одного до трёх, но таких чисел, очевидно, заведомо меньше 2005.

Задача 2.

Первое решение. Нетрудно доказать следующий геометрический факт: если в треугольниках XYZ и $X'Y'Z'$ верно $XY = X'Y'$ и $YZ = Y'Z'$, то из неравенства углов $\angle XYZ < \angle X'Y'Z'$ следует неравенство отрезков $XZ < X'Z'$, и наоборот. Далее мы будем несколько раз пользоваться этим фактом.

Будем (для определенности) считать, что точки B и C ближе к точке K, чем A и D соответственно. Предположим, что оба угла KMN и KNM острые. Тогда в треугольниках MNC и MND сторона MN общая, $NC = ND$, $\angle MNC < \angle MND$. Значит, $MC < MD$. Аналогично, $NB < NA$. В треугольниках BMC и AMD имеем: $BC = AD$, $BM = AM$, $MC < MD$, значит, $\angle MBC < \angle MAD$. Аналогично, $\angle NCB < \angle NDA$. Таким образом, доказано, что $\angle ABC + \angle DCB < \angle BAD + \angle CDA$. Осталось заметить, что $\angle BAD + \angle CDA = 180° - \angle K$, но $\angle ABC + \angle DCB = (180° - \angle KBC) + (180° - \angle KCB) = 360° - (\angle KBC + \angle KCB) = 360° - (180° - \angle K) = 180° + \angle K > 180° - \angle K$. Пришли к противоречию.

Второе решение. Будем (для определенности) считать, что точки B и C ближе к точке K, чем A и D соответственно. Заметим, что равенство $AB = CD$ невозможно — иначе $ABCD$ был бы параллелограммом, что противоречит условию. Пусть $AB > CD$. Докажем, что тогда угол KMN тупой.

Проведем к прямой AB перпендикуляры CX, NY и DZ. Так как D дальше от K, чем C, получим $DZ > CX$, откуда $AZ < BX$ (из прямоугольных треугольников ADZ и BCX). Заодно получаем, что угол K острый (иначе отрезок BX содержался бы в отрезке AZ, что противоречит доказанному). Теперь достаточно доказать, что Y дальше от K, чем M (тогда в прямоугольном треугольнике KYN точка M лежит на катете KY, откуда угол KMN тупой).

Ясно, что Y — середина отрезка XZ, причем $XZ \le BA$ (так как при проекции равные отрезки переходят в равные, а длины не увеличиваются). Расположим мысленно отрезок XZ на прямой BA так, чтобы точка Y совпала с точкой M. Получаем, что отрезок XZ лежит внутри отрезка BA, причем $BX = AZ$. Если теперь сдвигать отрезок XZ по прямой BA к точке K, разность длин $AZ - BX$ будет увеличиваться (так как AZ увеличивается, а BX уменьшается) до тех пор, пока точка X не совпадет с точкой B, после чего разность $BX - AZ$ перестанет меняться (пока X не совпадет с K). Значит, $AZ \ge BX$ при всех положениях отрезка XZ на стороне угла K, когда его середина Y ближе к K, чем M. Но мы доказали обратное: $AZ < BX$. Значит, Y дальше от K, чем M и угол KMN тупой, что и требовалось.

Задача 3. Ответ: 59.

Решение.

Докажем, что ни одну из ладей, стоящих в угловых клетках, снять нельзя. Действительно, без ограничения общности предположим, что первой из них сняли ладью с $a1$. В этот момент ладьи на $a8$ и $h1$ ещё стояли, и значит, ладью на $a1$ били две ладьи: какая-то из стоящих на линии a (такие есть) и на линии 1 (такие тоже есть). Далее, пусть можно оставить только четыре угловых ладьи. Посмотрим на последнюю снятую ладью. Ясно, что когда на доске стоят только угловые ладьи, нет поля, которое бьётся нечетным количеством ладей. Значит, только четыре угловых ладьи оставить нельзя.

Итак, доказано, что хотя бы 5 ладей на доске останутся. На шахматной доске 64 клетки. Покажем, как можно снять 59 ладей. Удобно переформулировать задачу и, выставив на доску пять ладей, далее выставлять по одной, так чтобы она каждый раз била нечётное количество, пока всё поле не будет заставлено. Пусть изначально ладьи стоят на клетках $a1$, $a8$, $h1$, $h8$, $b2$. Заполним снизу вверх линию b (снизу вверх — это от 1 к 8), слева направо линию 2, затем линию 1 (слева направо — это от a к h), снизу вверх линии a, h, наконец, слева направо линии 2–8.

Задача 4а. Ответ: нет, не всегда.

Решение.

Пусть $ABCD$ — ромб со стороной 10 м, такой что его диагональ AC равна 1 см. Нам будет удобно считать, что ромб расположен так, что AC горизонтальна, и точка B находится сверху. Докажем, что хотя бы один из муравьев не побывает в точке B.

Предположим, они оба побывали в точке B. Когда первый муравей находился в точке B, вектор, проведённый от первого муравья до второго, смотрел вниз (то есть имел вертикальную составляющую, направленную вниз). Когда же в точке B находился второй муравей, этот вектор смотрел вверх. Значит, когда-то он был горизонтальным, что невозможно: в самом широком месте ромб имеет ширину 1 см.

Задача 4б. Ответ: нет, не всегда.

Решение.

Пусть $ABCD$ — невыпуклый четырёхугольник со сторонами $AB = BC > 10$ м и $AD = DC > 10$ м, такой что $BD = AC = 1$ см, M — точка на AB, такая что $AM = 10$ см. Нам будет удобно считать, что четырёхугольник расположен так, что отрезок AC горизонтальный, BD вертикальный, и точка B находится сверху. Пусть изначально первый муравей находится в точке A, второй в M. Объясним, почему ни один из муравьев никогда не окажется в точке C.

Действительно, по соображениям, аналогичным тем, которые приводились в пункте а), получаем, что второй муравей никогда не сможет попасть в точку C. Аналогичным образом, замечаем, что первый муравей не может попасть в точки B и D, так как для них не найдётся более высоких точек на сторонах многоугольника на расстоянии ровно 10 см, в которые смог бы встать второй муравей. Ясно, что если первый муравей побывал в точке C, то в какой-то момент он переходил из левой половины четырёхугольника в правую, то есть побывал в одной из разделяющих эти половины точек B или D, а мы доказали, что это невозможно.

Задача 5. Ответ: 5251.

Первое решение.

Пусть (x, y, z) — единственное решение исходного уравнения при некотором N. Тогда, во-первых, $x = 1$ или $z = 1$: иначе $(x-1, y+2, z-1)$ тоже решение; во-вторых, $y \le 2$: иначе $(x+1, y-2, z+1)$ тоже решение. Это означает, что единственное решение уравнения имеет один из четырёх видов: 1) $(x, 1, 1)$; 2) $(x, 2, 1)$; 3) $(1, 1, z)$; 4) $(1, 2, z)$. В каждом из этих случаев найдём наибольшее возможное N.

1) $99x + 100 + 101 = N$. Пусть при этом N есть другое решение в натуральных числах: $99x + 100 + 101 = 99x_0 + 100y_0 + 101z_0$ (где $x > x_0 \ge 1, y_0 \ge 1, z_0 \ge 1$), т.е. $99(x - x_0) = N = 100(y_0 - 1) + 101(z_0 - 1)$. Таким образом, наличие другого решения означает равенство $99x' = 100y' + 101z'$ $(0 < x' < x, y' \ge 0, z' \ge 0)$. Пусть наименьшее возможное x' равно x'_0. Это же число будет наибольшим x, не допускающим ещё одного решения: действительно, при $x \ge x'_0 + 1$ можно будет "заменить" $99x'_0$ на $100y' + 101z'$, а при $x = x'_0$ другого решения не будет, т. к. ему должен будет соответствовать $x' < x = x'_0$.

Теперь найдём x'_0. Имеем $99x' = 100y' + 101z' = 99(y' + z') + y' + 2z'$, значит, $y' + 2z'$ делится на 99. Число x' будет наименьшим при $y' + 2z' = 99$ (действительно, если $y' + 2z' \ge 198$, то $y' + z' \ge 99$, что даёт заведомо большее x'). При таком условии x' будет наименьшим при наименьшей сумме $y' + z'$, т. е. $y'_0 = 1, z'_0 = 49$. Тем самым, $x'_0 = (100 + 101 \cdot 49)/99 = 51$. В этом случае $N = 99 \cdot 51 + 100 \cdot 1 + 101 \cdot 1 = 5250$.

2) $99x + 100 \cdot 2 + 101 = N$. Аналогично предыдущему, наличие другого решения означает равенство $99x' + 100 = 100y' + 101z'$ $(0 < x' < x, y' \ge 0, z' \ge 0)$. Случай $y' \ge 1$ уже рассмотрен в предыдущем пункте. Значит, предполагаем $y' = 0$ и $99x' + 100 = 101z'$. Переписав, получаем $99(x' - z' + 1) = 2z' - 1$. Наименьшее z', при котором такое равенство возможно, очевидно, равно 50, откуда наименьшее x' будет равно $(101 \cdot 50 - 100)/99 = 50$. В этом случае $N = 99 \cdot 50 + 100 \cdot 2 + 101 \cdot 1 = 5251$.

3) $99 + 100 + 101z = N$. Наличие другого решения означает равенство $101z' = 99x' + 100y'$ $(0 < z' < z, x' \ge 0, y' \ge 0)$. Аналогично п. 1 ищем наименьшее возможное z'. Имеем $101z' = 101(x' + y') - 2x' - y'$, значит, $2x' + y'$ делится на 101. Если $2x' + y' \ge 202$, то $(x' + y') \ge 101$, что дает заведомо большее z', чем при $2x' + y' = 101$. Итак, $x'_0 = 50, y'_0 = 1$, поэтому $z'_0 = (99 \cdot 50 + 100)/101 = 50$ и $N = 99 + 100 + 101 \cdot 50 = 5249$.

4) $99 + 100 \cdot 2 + 101z = N$. Наличие другого решения означает равенство $101z' + 100 = 99x' + 100y'$ $(0 < z' < z, x' \ge 0, y' \ge 0)$. Случай $y' \ge 1$ уже рассмотрен в предыдущем пункте. Значит, $y' = 0$ и $101z' + 100 = 99x'$. Переписав, получаем $99(x' - z' - 1) = 2z' + 1$. Наименьшее z', при котором такое равенство возможно, равно 49 (при $x'_0 = 51$), откуда $N = 99 + 100 \cdot 2 + 101 \cdot 49 = 5248$.

Второе решение.

Отметим равенства $99 \cdot 1 - 100 \cdot 2 + 101 \cdot 1 = 99 \cdot 50 + 100 - 101 \cdot 50 = -99 \cdot 51 + 100 + 101 \cdot 49 = 0$.

Вычитая или прибавляя их к уравнению, получим следующее. Пусть (x, y, z) — единственное решение исходного уравнения при некотором N. Тогда, во-первых, $x = 1$ или $z = 1$: иначе $(x-1, y+2, z-1)$ тоже решение; во-вторых, $y \le 2$: иначе $(x+1, y-2, z+1)$ тоже решение; в-третьих, $x \le 52$: иначе $(x-51, y+1, z+49)$ тоже решение, и $z \le 51$: иначе $(x+50, y+1, z-50)$ тоже решение. Таким образом, требуемое N — наибольшее из допускающих единственное решение чисел вида $99x+100+101, 99x+100\cdot 2+101, 99+100+101z, 99+100\cdot 2+101z$, причем $x \le 51, z \le 50$. Осталось заметить, что два наибольших N такого вида допускают как минимум по два решения: $99 \cdot 51 + 100 \cdot 2 + 101 = 99 + 100 + 101 \cdot 51$ и $99 + 100 \cdot 2 + 101 \cdot 50 = 99 \cdot 52 + 100 + 101$. Следующее за ними число указанного вида, как легко убедиться, — $5251 = 99 \cdot 50 + 100 \cdot 2 + 101$, и оно уже допускает только одно решение. Проверим это.

Пусть есть другое решение в натуральных числах: $99 \cdot 50 + 100 \cdot 2 + 101 = 99x_0 + 100y_0 + 101z_0$, $(x_0, y_0, z_0) \ne (50, 2, 1)$. Учитывая $99 \cdot 1 - 100 \cdot 2 + 101 \cdot 1 = 0$, можно считать $y_0 = 1$ или $y_0 = 2$, т. е. либо $99 \cdot 50 + 100 + 101 = 99x_0 + 101z_0$, либо $99 \cdot 50 + 101 = 99x_0 + 101z_0$. Второй вариант влечет $99(50-x_0) \vdots 101$ при $1 \le x_0 < 50$ и тем самым невозможен. Второй вариант тоже невозможен: $x_0 \le 52$ (иначе правая часть равенства больше левой), и $99(50-x_0)+100 \vdots 101$, т. е. $2(50-x_0)+1 \vdots 101$, что также с очевидностью невозможно при $1 \le x_0 \le 52$.

Задача 6. Предположим, Карлсон умеет съедать все варенье, если вместо 100 и $1/100$ в условии указано 99 и $1/99$ (общее количество банок неважно, главное, что их достаточно много, не меньше 100). (Будем говорить про эти задачи соответственно "задача-100" и "задача-99".) Объясним, как ему тогда действовать в случае задачи-100.

Карлсон мысленно делит все банки варенья на самую большую (по количеству варенья) и все остальные. Заметим, что для "всех остальных" банок выполняется условие задачи-99 (ведь в "остальных"банках не меньше, чем $99/100$ всего варенья, и в каждой из "остальных"банок не более $1/100$ всего варенья, то есть не более $(1/100) \cdot (100/99) = 1/99$ от количества варенья в "остальных"банках).

Поэтому Карлсон мог бы действовать так: съесть из "остальных"банок все варенье по алгоритму "задачи 99", на каждом шаге беря набор 99 банок из "остальных"и добавляя еще сотую банку — "самую большую". Для того, чтобы варенье в "самой большой" банке и "всех остальных" кончилось одновременно, необходимо, чтобы в ней было ровно в 99 раз меньше варенья, чем суммарно во "всех остальных" (поскольку, разумеется, из нее каждый раз съедается в 99 раз меньше, чем из "остальных"). То есть необходимо, чтобы в самой большой банке изначально была ровно $1/100$ доля от общего количества варенья.

Объясним, как Карлсону добиться этого. Пусть в самой большой банке меньше $1/100$ общего количества варенья. Он будет выбирать 100 непустых банок из "всех остальных" и съедать из них некоторое количество варенья. Доля варенья в самой большой банке при этом будет увеличиваться. Покажем, как ему действовать, чтобы гарантированно довести эту долю до $1/100$. Если количество варенья в самой маленькой банке (из выбранных ста) позволяет съесть часть варенья так, чтобы доля самой большой банки стала равна $1/100$, он так и делает. Иначе съедает все варенье из самой маленькой банки, уменьшая количество непустых банок. Когда он остановится? Либо когда добьется требуемого, либо когда непустых банок среди "всех остальных" станет меньше 100. Но в последнем случае доля самой большой точно не меньше $1/100$, т.е. он должен был остановиться раньше.

Для завершения решения осталось заметить, что мы научились сводить "задачу-100" к "задаче-99", но точно также можно свести ее теперь к "задаче-98", ту в свою очередь к "задаче-97", и т. д. Ну а "задача-1" совершенно очевидна.

10-11 классы

Задача 1. Ответ: $n = 1$, $n > 2$.

Решение.

Рассмотрим три случая: 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n > 2$.

При $n = 1$ a_1/a_1 — целое при любом натуральном a_1.

Предположим, что существуют два различных натуральных числа a_1 и a_2, такие что $a_1/a_2 + a_2/a_1$ — целое число. Пусть $k = \text{НОД}(a_1, a_2)$, тогда $a_1 = k \cdot p$, $a_2 = k \cdot q$, где $\text{НОД}(p, q) = 1$. Получаем, что $p/q + q/p$ — тоже целое, то есть $p^2 + q^2$ делится на pq, а значит $p^2 + q^2$ делится и на p. Но так как p^2 делится на p, то и q^2 делится на p. Но мы выбирали p и q так, что $\text{НОД}(p, q) = 1$, а значит q тоже делится p, что означает, что $p = 1$ следовательно и $q = 1$ — противоречие.

Пусть $n > 2$, тогда рассмотрим $a_1, a_2, \ldots, a_n$, равные соответственно $1, n-1, (n-1)^2, \ldots, (n-1)^{n-1}$. Тогда $a_1/a_2+a_2/a_3+\cdots+a_n/a_1 = 1/(n-1)+(n-1)/(n-1)^2+\cdots+(n-1)^{n-2}/(n-1)^{n-1}+(n-1)^{n-1}/1 = (n-1)\cdot(1/(n-1))+(n-1)^{n-1} = 1+(n-1)^{n-1}$ — целое.

Задача 2а. Ответ: нет, не всегда.

Решение.

Рассмотрим тупоугольный равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$; AC равно 10 м, а высота опущенная из точки B на AC равна 5 см. Докажем, что если в начальный момент времени первый муравей находился в точке A, а второй муравей находился на AC в десяти сантиметрах от первого муравья, то второй муравей никогда не сможет попасть в точку A. Предположим противное. Тогда введём систему координат на плоскости следующим образом: началом координат будет точка A, ось Ox направим по стороне AC, а ось Oy пусть будет направлена произвольным образом перпендикулярно оси Ox. В этом случае изначально абсцисса первого муравья была меньше абсциссы второго муравья, а в тот момент, когда второй муравей находился в точке A, его абсцисса была меньше абсциссы первого муравья. Но тогда в силу того, что муравьи двигались непрерывно можно утверждать, что в некоторый момент их абсциссы совпадали, то есть отрезок их соединяющий был параллелен высоте опущенной из точки B на сторону AC. Но это не возможно, так как в этом случае расстояние между муравьями было бы не больше 5см.

Задача 2а. Ответ: нет, не всегда.

Решение.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$: $AB = BC = 10$ м; $CD = DA = 5$ м; $AC = 5$ см, причем точки B и D лежат по одну сторону относительно отрезка AC. Пусть в начальный момент времени первый муравей находился в точке D, а второй на стороне AD в десяти сантиметрах от первого. Заметим, что первый муравей будет всегда ближе к точке D, чем второй муравей, так как иначе они в некоторый момент времени находились бы на одном расстоянии от D, что невозможно, ввиду того, что $AC < 10$ см. А следовательно первый муравей не сможет побывать ни в точке A ни в точке C. В этом случае первый муравей будет всегда находится на ломаной ADC так как иначе ему пришлось бы проползти через точку A или C. Но тогда ни один из муравьёв не сможет побывать в точке B, так как расстояние от любой точки ломаной ADC до точки B больше 10 см.

Задача 3. Ответ: 59 ладей.

Решение.

Сначала докажем, что нельзя снять ладьи, стоящие в четырёх углах доски. Предположим, что некоторые из этих ладей удалось снять, тогда рассмотрим момент, когда мы впервые снимаем ладью, находящуюся в углу доски. Так как в остальных углах находятся ладьи, то она била как минимум двух ладей, но с другой стороны больше двух ладей угловая ладья бить не может, а следовательно она не могла быть снята — противоречие.

Теперь докажем что 60 ладей мы снять не можем. Рассмотрим момент, когда мы снимали последнюю ладью. Тогда если эта ладья стояла на границе нашей доски, то она била двух ладей, иначе она не била ни одной ладьи, то есть всегда чётное число - противоречие, а следовательно больше 59 ладей мы снять не могли.

Приведём пример, как снять 59 ладей:

a7, a6, b6, a5, b5, c5, a4, b4, c4, d4, a3, b3, c3, d3, e3, a2, b2, c2, d2, e2, f2, b1, c1, d1, e1, f1, g1, c8, d8, e8, f8, g8, d7, e7, f7, g7, h7, e6, f6, g6, h6, f5, g5, h5, g4, h4, h3, h2, g2, g3, f3, f4, e4, e5, d5, d6, c6, c7, b7.

Задача 4.

Очевидно, что условие задачи эквивалентно тому, что данную окружность можно разделить на три дуги так, чтобы разница между максимальной и минимальной суммой чисел на дуге не превосходила бы 1. Разобьём окружность на три произвольные дуги $A0$, $B0$ и $C0$. Пусть суммы чисел на дугах равны a, b и c соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $a \le b \le c$. Далее будем действовать следующим образом: если $c - a > 1$, то сдвигаем границу между дугами A и C так, чтобы ровно одно число с дуги C перешло бы на дугу A. Пусть это число r. После нашей операции мы получили новые дуги $A1$, $B1$ и $C1$ с суммами $a + r$, b, $c - r$. Заметим, что если $a = b < c$, то $a < a + r$, $a = b$, $a < c - r$, $a + r < c$ (так как $a + r < a + 1 < c$), $b < c$, $c - r < c$, иначе (то есть если $a < b \le c$) $a < a + r$, $a < b$, $a < c - r$, $a + r < c$, $b \le c$, $c - r < c$. То есть в любом случае либо максимальное из чисел уменьшается, а минимальное не уменьшается, либо минимальное из чисел увеличивается, а максимальное нет. А, следовательно, если разность между максимальной суммой и минимальной была больше 1, то её всегда можно уменьшить. Но так как чисел у нас всего конечное число, то разница между этими суммами не может постоянно уменьшаться, а значит, наступит момент, когда она станет меньше 1.

Задача 5.

Первое решение. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC; $\angle ACB = a$.Тогда $\angle ABC = 2a$;$\angle CAB = 4a$, а следовательно $a + 2a + 4a = \pi$, то есть $7a = \pi$. $\angle CC_1A = \pi - \angle CAB - \angle C_1CA = 5a/2$; $\angle C_1IA = \pi - \angle IC_1A - \angle C_1AI = 5a/2$, а значит $IA = C_1A$; $\angle AB_1I = \pi - \angle BAB_1 - \angle B_1BA = 2a = \angle IAB_1$, а значит $IA = IB_1$; $\angle BIA_1 = \angle AIB_1 = \pi - \angle IAB_1 - \angle IB_1A = 3a$, $\angle A_1BA = 2a = \angle A_1AB$, следовательно $AA_1 = BA_1$ и $\angle AA_1B = 3a$, а значит $BA_1 = BI$; Отметим на отрезке BI точку K так, чтобы $\angle KA_1A$ был равен $2a$, тогда $\angle A_1KI = \pi - \angle KA_1I - \angle A_1IK = 2a$, а значит $A_1I = KI$ и $\angle BKA_1 = \angle KA_1I + \angle KIA_1 = 5a$, следовательно, $\angle BA_1K) = \pi - \angle A_1BK - \angle BKA_1 = a$, а следовательно, $BK = A_1K$ Докажем, что треугольник KA_1B_1 равен треугольнику ACA_1: $A_1K = BK = BI - KI = BA_1 - KI = A_1A - KI = A_1A - A_1I = AI = AC$, $KB_1 = KI + IB_1 = A_1I + IB_1 = A_1I + IA = A_1A$ $\angle A_1KB_1 = 2a = \angle C_1AA_1$, а следовательно треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, а следовательно $A_1B_1 = A_1C_1$.

Второе решение:

Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Углы нашего треугольника равны $4\pi/7$, $2\pi/7$ и $\pi/7$; поэтому, разделив окружность на 7 равных дуг, начиная с точки A, мы получим вписанный в окружность правильный семиугольник $ABXYZCT$.

Так как AA_1 — биссектриса угла BAC, то она проходит через точку Y — середину дуги BC. Аналогично, BB_1 — биссектриса угла ABC, а значит проходит через точку T — середину дуги AC.

Из симметрии очевидно, что $BA_1 = AA_1$ и $YA_1 = CA_1$, а следовательно при повороте вокруг точки A_1 на угол BA_1A точка B перейдёт в точку A, а точка C в точку Y (так как $\angle BA_1A = \angle CA_1Y$). Кроме того, прямая BA перейдёт в прямую AC (так как $\angle A_1BA = 2\pi/7 = \angle A_1AC$), а прямая C_1C — в прямую B_1Y (так как $\angle BCC_1 = pi/14 = \angle AYB_1$, первое равенство верно, ввиду того, CC_1 — биссектриса угла ACB, второе — ввиду того, что YB_1 — биссектриса угла AYT из симметрии). А следовательно точка пересечения прямых BA и CC_1 (то есть точка C_1) перейдет в точку пересечения прямых AC и YB_1 (то есть в точку B_1). Но тогда отрезок A_1C_1 перейдет в отрезок A_1B_1, то есть $A_1C_1 = A_1B_1$.

Задача 6. Ответ: $(2005^2 + 2003^2 + 2002^2 + ... + 2^2 + 1^2 + 1^2)/2 = 1342355520$.

Решение.

Заметим, что при наших операциях сумма квадратов всех чисел всегда увеличивается на 2. Действительно, если мы записываем две единицы, то наше утверждение очевидно, если же мы стираем два одинаковых числа (n и n), и записываем $n-1$, $n+1$, то сумма квадратов снова увеличивается на 2, так как $(n-1)^2 + (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n + 1 = n^2 + n^2 + 2$. А, следовательно, сумма квадратов всех чисел всегда чётное число.

Докажем, что если мы получили число 2005 за минимальное количество операций, то на доске также присутствуют числа 2003, 2002, ... 2, 1. Предположим противное: пусть число $n < 2004$ отсутствует на доске. (Заметим, что каждое число меньшее 2005 должно было появиться на доске, так как если n не появлялось на доске, то на доске так же не появлялись числа $n+1$, $n+2$, $\ldots 2005$ — противоречие). Рассмотрим момент, когда n последний раз было стёрто. Тогда в этот самый момент должны были появятся числа $n+1$ и $n-1$. Но в силу того, что количество операций минимально можно утверждать, что либо $n+1 = 2005$, либо $n+1$ будет использоваться в дальнейшем. В первом случае $n = 2004$, а во втором при использовании числа $n+1$ число n снова появится на доске — противоречие.

Отметим, что помимо чисел 2005, 2003, 2002, $\ldots 2$, 1 на доске должно присутствовать ещё хотя бы одно ненулевое число. Это следует из того, что (по формуле $n^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = n(n+1)(2n+1)/6$) $2005^2 + 2003^2 + ... + 2^2 + 1^2 = (2005^2 + 2003 \cdot 2004 \cdot 4007)/6 = 2005^2 + 2003 \cdot 334 \cdot 4007$ — нечетное число, а нами было отмечено, что сумма квадратов всех чисел, находящихся на доске — чётное число.

Докажем, что на доске можно получить числа (и больше на доске не будет ненулевых чисел) n, $n-2, \ldots, 3, 2, 1$ при $n = 4k+2$, $4k+3$ и n, $n-2, \ldots, 3, 2, 1, 1$ при $n = 4k$, $4k+1$ методом математической индукции:

При $n = 1$ — верно (1, 1 после первого хода).

Пусть верно для $n = k$, докажем для $n = k+1$. (Рассмотрим только случай $k = 4l$, так остальные случаи абсолютно эквивалентны данному). По предположения индукции мы можем получить набор $4l$, $4l-2, \ldots, 2, 1, 1$. Далее сотрём две "1"и напишем "2","0", затем сотрём две "2"и напишем "3","1", затем "3","3"заменяем на "4","2", $\ldots$, "$4l-2$","$4l-2$"заменяем на "$4l-1$","$4l-3$". В этот момент на доске будут числа $4l$, $4l-1$, $4l-2$, $\ldots$, 3, 2, 1. Теперь напишем две "1"на доске и произведём те же действия: "1","1"заменяем на "2","0"; "2","2"заменяем на "3","1"; $\ldots$, "$4l$", "$4l$"заменяем на "$4l+1$","$4l-1$". После этого на доске (из ненулевых чисел) останутся только $4l+1$, $4l-1$, $4l-2, \ldots 3$, 2, 1, 1. Заметим, что ввиду того, что после каждой операции сумма квадратов всех чисел увеличивается на 2, количество операций, которое необходимо для получения чисел 2005, 2003, 2002, ... 2, 1, 1 равно $(2005^2 + 2003^2 + 2002^2 + ... + 2^2 + 1^2 + 1^2)/2 = (2005^2)/2 + (2003 \cdot 2004 \cdot 4007 + 1)/12$.