

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 26 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. Дана квадратная таблица. В каждой ее клетке стоит либо плюс, либо минус, причем всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.
Б. Р. Френкин
- 5 2. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.
Т. В. Казыцына, Б. Р. Френкин
- 6 3. Можно ли все натуральные делители числа $100!$ (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?
М. И. Малкин
- 7 4. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.
Е. В. Бакаев
- 8 5. Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N — точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.
Е. В. Бакаев
- 8 6. Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n -значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.
А. В. Шаповалов
- 5 7. Паутина имеет вид клетчатой сетки 100×100 узлов (другими словами, это сетка 99×99 клеток). В каком-то ее углу сидит паук, а в некоторых 100 узлах к паутине приклеились мухи. За ход паук может переместиться в любой соседний с ним узел. Может ли паук гарантированно съесть всех мух, затратив не более
- 5 а) 2100 ходов;
5 б) 2000 ходов?

И. И. Богданов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 26 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 4 1. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

Т. В. Казыцына, Б. Р. Френкин

- 6 2. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

Е. В. Бакаев

- 6 3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k .

Г. А. Гальперин

- 7 4. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках A' , B' , C' соответственно. Прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в точке G . Окружность, описанная около треугольника $GA'B'$, вторично пересекает прямые AC и BC в точках C_A и C_B . Аналогично определяются точки A_B , A_C , B_C , B_A . Докажите, что точки A_B , A_C , B_C , B_A , C_A , C_B лежат на одной окружности.

А. А. Заславский

- 7 5. Петя посчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T , O , W и N , причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася посчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O , и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

Г. А. Погудин

- 8 6. На столе лежал проволочный треугольник с углами x° , y° , z° . Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)^\circ$, 181° , $(y-1)^\circ$, 181° , $(z-1)^\circ$, 181° . Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.

И. В. Митрофанов

- 10 7. В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xg = yp$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

И. И. Богданов