Предварительные решения 26 Турнира Городов.

Весенний тур, тренировочный вариант, младшие классы.

1. Ответ: на 2 километра.

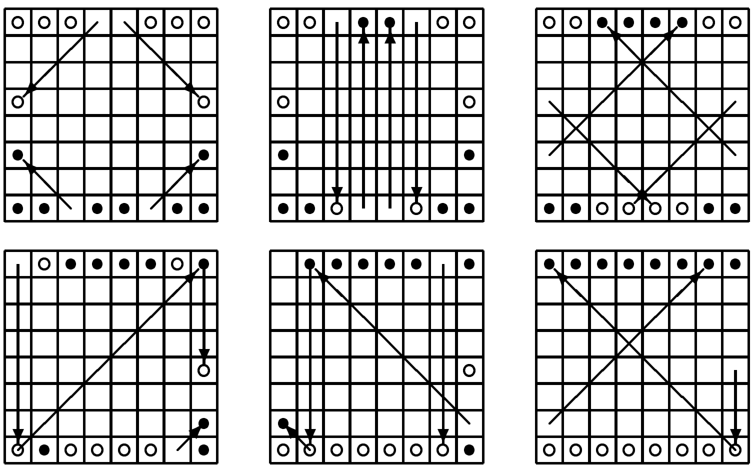
Решение. Пусть вышли не двое, а четверо: кроме A (Ани) и B (Бори) на полчаса раньше стартовали их двойники a и b. Соответственно, случилось 4 встречи: ab, aB, Ab и AB. Мы знаем, что от места aB до AB 2 км. Ясно, что встреча ab была там же, где AB, но на 30 минут раньше. Поэтому от места aB до ab те же 2 км. Поскольку, однако, b и B идут с одинаковыми постоянными скоростями, то интервал (по времени и расстоянию) между ними одинаковый. Идущие навстречу a и A преодолевают этот интервал за одинаковое время, поскольку их скорости сближения с B одинаковы. А поскольку скорости a и A одинаковы, то и расстояние они при этом проходят одинаковое. Значит, от места Ab до AB тоже 2 км, что и требовалось.

2. Если число N начинается на 1 или 2, то задача решена. Если число N начинается на 4, 5, 6, 7, 8 или 9, то число $3N$ начинается на 1. Если число N начинается на 3, то число $3N$ либо имеет столько же цифр, сколько N, и тогда начинается на 9, либо имеет больше цифр, и тогда начинается на 1.

3. Ответ. За 23 хода.

Решение. Из пары ферзей на одной не крайней вертикали тот, кто сходит раньше, должен сделать минимум два хода; 6 таких пар затратят не менее 18 ходов. Из четверки угловых ферзей тот, кто сходит первым, тоже должен сделать минимум два хода, итого еще 5 ходов.

Пример на 23 хода можно увидеть на следующих рисунках.



4. Пусть прямая AB пересекает отрезок KN в точке T. Заметим, что KC пересекает отрезок MN в середине. Поскольку LT параллелен MN, то по теореме Фалеса KC пересекает его тоже в середине. Прямоугольные треугольники ANT и ANL равны по двум катетам. Отсюда угол LNA равен углу TNA и равен углу KNA.

5. *Комментарий.* В городе нет развязок — мостов и туннелей.

Первое решение. Автомобилист совершил прогулку по контуру несамопересекающегося многоугольника. Предположим сначала, что автомобилист стартовал не из вершины этого многоугольника. Тогда ясно, что он сделал ровно один оборот вокруг своей оси. Каждый поворот был на четверть оборота в ту или другую сторону. Сумма поворотов налево отличается от суммы поворотов направо на один оборот, то есть на 4 поворота. Значит, если автомобилист сделал полный оборот против часовой стрелки, он сделал 96 правых поворотов, если по часовой — то 104 правых поворота. Если же автомобилист стартовал из вершины, то вернувшись в нее он мог оказаться повернутым не так, как в начале, и достаточно сделать один поворот на месте, чтобы оказаться в точности в исходном положении. Поэтому возможное число правых поворотов: 95, 96, 97, 103, 104 или 105 (соответствующие примеры построить нетрудно).

Второе решение. Заметим, что углы многоугольника, по контуру которого проехал автомобилист, равны каждый либо 90, либо 270 градусов. Пусть какой-то поворот направо произошел в вершине с углом 90 градусов. Тогда все повороты направо происходят в точности в вершинах с углом 90 градусов (а все повороты налево происходят в точности в вершинах с углом 270 градусов). Пусть поворотов направо было x, налево — 100. Предположим сначала, что автомобилист стартовал не из вершины этого многоугольника. Тогда всего вершин $100+x$, и сумма углов многоугольника равна, с одной стороны, $(x+100-2)180$ градусов (по известной формуле), а с другой стороны $90x + 100 \cdot 270$ градусов. Приравнивая эти выражения, получаем, что $2x + 200 - 4 = x + 300$, откуда $x = 104$. Если правые повороты были в вершинах с углами 270 градусов, то получим $x = 96$. Случай, когда автомобилист стартовал не из вершины, разбирается так же, как и в первом решении.

Весенний тур, тренировочный вариант, старшие классы.

1. Решение. Заметим, что графики $y = x^2+ax+b$ и $y = x^2+cx+d$ пересекаются тогда и только тогда, когда графики $y = ax + b$ и $y = cx + d$ пересекаются, причем абсциссы точек пересечения одни и те же (это следует из равносильности уравнений $x^2+ax+b = x^2+cx+d$ и $ax + b = cx + d$). Заменим теперь каждый график вида $y = x^2 + ax + b$ на график $y = ax + b$ с теми же a и b. Условия насчет пересечений сохранятся, однако вместо парабол у нас теперь прямые! Легко видеть, что 4 точки могут получиться только у двух пар параллельных прямых. Точки пересечения лежат в вершинах параллелограмма. Наибольшая и наименьшая абсцисса — у пары противоположных вершин (у нас нет прямых параллельных оси ординат). Полусумма абсцисс пары противоположных вершин равна абсциссе центра параллелограмма. Поэтому полусуммы, а, значит, и суммы, равны между собой.

2. Решение. а) Покажем на примере числа 2005312 (общий случай ничем не отличается). Рассмотрим кусок ленты 200531202005312120053122...20053126 (7 групп по 8 цифр). В каждой группе есть как минимум один разрез. Если в первой группе слева от разреза окажется $k < 7$ цифр, то в следующей $k - 1$ цифра, и т.д. Значит, из группы $2005312k$ разрезы вырежут как раз число 2005312.

б) Кусок 200531202005312120053122...20053126 встретится на ленте бесконечно много раз как начало длинных чисел. И каждый раз мы вырежем из него нужную полоску.

3. Смотрите решение задачи 4 младших классов.

4. Смотрите решение задачи 5 младших классов.

5. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — данные в задаче числа. Известно, что $x_1 + \ldots + x_k = 10$, $x_1^2 + \ldots + x_k^2 = 20$. Заметим, что для каждого i от 1 до k верно неравенство $x_i^3 + 4x_i \geq 4x_i^2$ (перенесите все в левую часть и получите $x_i(x_i - 2)^2 \geq 0$). Сложив все эти неравенства, получим, что $x_1^3 + \ldots + x_k^3 + 4(x_1 + \ldots + x_k) \geq 4(x_1^2 + \ldots + x_k^2) > 80$, то есть $x_1^3 + \ldots + x_k^3 > 80 - 40 = 40$, что и требовалось доказать.

Весенний тур, основной вариант, младшие классы.

1. Смотрите решение задачи 1 старших классов.

2. Так как AA' и BB' — высоты, треугольники $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ и $CB'H$ — прямоугольные. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна его половине, $XA' = \frac{1}{2}AB = XB'$ и $YA' = \frac{1}{2}CH = YB'$. Следовательно, точки X и Y лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $A'B'$.

3. Ответ: верно.

Решение. Допустим, что в течение дня на часах повторилось одно и то же расположение стрелок. Пусть между этими моментами прошло время t (где t меньше 12 часов). Тогда ясно, что в любой момент времени расположение стрелок такое же, как и спустя время t. Но в 12 часов все три стрелки совпадают, значит и спустя время t все три стрелки совпадают. Но три стрелки могут совпадать только один раз в день — в 12 часов (докажите это).

4. а) Пусть разрез проходил вертикально. Проведем во всех квадратиках 1×1 вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Заметим, что при сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, при разрезании разрезаются они и только они. Считая число получающихся при этом частей, получаем либо 11, либо 13.

б) Заметим, что в каждом квадратике будет сделан ровно один разрез. Рассмотрим верхний левый квадратик. В нем разрез может быть сделан четырьмя различными способами. Если мы выберем один из способов, то разрезы в остальных квадратиках определятся однозначно (подумайте, почему). Все четыре случая возможны (их можно и нарисовать). Нетрудно найти ответ в каждом из случаев: $6 \cdot 7 + 1 = 43$, $6 \cdot 6 + 1 = 37$, $5 \cdot 7 + 1 = 36$ и $5 \cdot 6 + 1 = 31$.

5. Нет, не всегда. Опишем самый простой из возможных контрпримеров. Пусть в коробку $2 \times 2 \times 3$ помещены два бруска $1 \times 2 \times 3$. Немного уменьшим у одного из них измерение длины 3, а у другого — измерение длины 2. Так как у второго бруска одно измерение равно 3, высоту коробки уменьшить нельзя. Так как высоты обоих брусков больше 2, их можно ставить в коробку только вертикально. Ясно, что изменить взаимное расположение брусков нельзя. Поэтому горизонтальные размеры коробки также нельзя уменьшить.

Выясните самостоятельно, изменится ли ответ в задаче, если у каждого бруска уменьшаются два измерения из трех?

6. Ответ: больше денег сможет получить Ерема.

Решение. Заметим сначала, что в этой игре не может быть ничьи (так как общая сумма денег нечетна). Это значит, что у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия (докажите!).

Допустим, что у Фомы есть выигрышная стратегия. Пусть Фома сделал первый ход. Тогда на любой ход Еремы Фома сможет ответить так, чтобы в дальнейшем выиграть. Но если Ерема ответит, что деньги нужно отдать Ереме, то он окажется точно в такой же ситуации, в которой оказался бы Фома, если бы Ерема ответил "деньги отдать Фоме"(и Фома при этом знал бы, как выиграть). Значит, Ерема может воспользоваться этой стратегией Фомы и выиграть — противоречие. Значит у Фомы выигрышной стратегии нет.

Значит выигрышная стратегия есть у Еремы.

7. Ответ: нет, не могло.

Решение. Сопоставим каждой фишке ее "координаты"на шахматной доске: фишка, стоящая в n-ом слева столбце и в m-ой снизу строке имеет координаты (n, m). Вычислим у каждой фишки разность ее координат $n - m$ и сложим все эти разности. Получится 0, поскольку сумма первых координат всех фишек равна $1 + 2 \ldots + 8$ (так как в каждом столбце ровно одна фишка), и сумма вторых координат всех фишек равна $1 + 2 \ldots + 8$ (так как в каждой строке ровно одна фишка).

Допустим, что после перестановки снова в каждой строке и в каждом столбце оказалось по одной фишке. Тогда сумма разностей координат фишек после перестановки останется нулевой.

Если при перестановке фишка попала на клетку с большим номером, то она либо сдвинулась вниз в своей диагонали, либо перебралась на одну из следующих (вправо вниз) диагоналей. Можно тогда сказать, что фишка сдвигается так: либо остается в своей диагонали и сдвигается по ней вниз, либо сдвигается на несколько клеток вправо, после чего двигается как угодно на той диагонали, куда она попала. Посмотрим, что происходит при этом с разностью координат фишки. В одной диагонали разность координат постоянна. Поэтому разность координат фишки либо не изменится (если фишка не меняла диагональ), либо увеличится (если меняла). Но общая сумма разностей не должна измениться! Это возможно только в том случае, когда каждая фишка осталась в своей диагонали. Но это невозможно, так как фишка, стоящая в нижней строке, не сможет увеличить свой номер, оставшись в своей диагонали. Противоречие.

Весенний тур, основной вариант, старшие классы.

1. Пусть точки имеют координаты $(x_1, P(x_1))$ и $(x_2, P(x_2))$, где $x_1 \neq x_2$. Тогда расстояние между ними равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (P(x_1) - P(x_2))^2} = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + \Big(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\Big)^2}.$$

Отметим, что $x_1^n - x_2^n$ при любом натуральном n делится на $x_1 - x_2$. Поскольку коэффициенты многочлена $P(x)$ —целые, то $m = \frac{P(x_1)-P(x_2)}{x_1-x_2}$ — целое число. Из формулы для расстояния следует, что число $\sqrt{m^2+1}$ — рациональное, а, значит, и целое. Поскольку число вида $1 + m^2$ является полным квадратом только при $m = 0$, то $P(x_1) = P(x_2)$, что равносильно утверждению задачи.

Комментарий. Выкладки упрощаются, если параллельно перенести график многочлена так, чтобы одна из данных точек совпала с началом координат.

2. Пусть O_2 – центр окружности ω_2. Так как проведённые из точки C касательные к окружности ω_2 равны, то $\angle O_2CA = \angle O_2CB$. Так как эти углы вписаны в окружность ω_1, то равны ее дуги AO и OB. Поэтому и стягивающие их хорды AO и OB равны. Следовательно, точки A и B симметричны друг другу относительно линии центров, поэтому соединяющий их отрезок перпендикулярен линии центров.

3. Смотрите решение задачи 6 младших классов.

4. Ответ: да, существует.

Докажем например, что трехчлен $f(x) = 2x^2 - 1$ удовлетворяет условию.

Заметим, что если для некоторого c значение $f(c)$ лежит между -1 и 1, то и само число c лежит между -1 и 1.

Введем обозначения: $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$.

Докажем индукцией по n следующее утверждение: если $-1 < c < 1$, то уравнение $f_n(x) = c$ имеет ровно 2^n корней на интервале $(-1, 1)$.

База $(n = 1)$ очевидна (например, из графика).

Пусть утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k+1$. Уравнение $f_{k+1}(x) = c$, где $-1 < c < 1$, равносильно уравнению $f(f_k(x)) = c$, которое, очевидно, равносильно совокупности уравнений $f_k(x) = \alpha$, $f_k(x) = \beta$, где $-1 < \alpha < 1$ и $-1 < \beta < 1$ — корни уравнения $f(x) = c$. Каждое из этих уравнений имеет, по индукции, ровно 2^k корней из интервала $(-1, 1)$, откуда уравнение $f_{k+1}(x) = c$ имеет ровно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ корней из интервала $(-1; 1)$, что и требовалось доказать.

Осталось заметить, что степень многочлена $f_n(x)$ равна 2^n, откуда он имеет не более 2^n корней, а по доказанному выше имеет не менее 2^n корней, то есть имеет ровно 2^n корней.

5. Икосаэдр (и додекаэдр) определяется однозначно, если задана длина его ребра. Заметим, что икосаэдр и додекаэдр двойственны друг другу: это значит, что центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра, и наоборот: центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра (проверьте).

Пусть **И** и **Д** — данные в задаче икосаэдр и додекаэдр соответственно, вписанные в одну и ту же сферу с центром в точке O. Так как **И** и **Д** двойственны друг другу, их можно расположить в пространстве так, что они останутся вписанными в данную сферу, и будут выполнятся условия: отрезки, соединяющие O с вершинами **И**, пересекают грани **Д** в центрах этих граней, а отрезки, соединяющие O с вершинами **Д**, пересекают грани **И** в центрах этих граней. Пусть ABC — одна из граней икосаэдра, K — та из вершин додекаэдра, для которой отрезок OK пересекает ABC (в ее центре). Ясно, что отрезки KA, KB и KC равны, пусть их длина есть l. Тогда точки окружности α, описанной вокруг грани ABC, равноудалены от точки K на расстояние l.

Рассмотрим теперь содержащую вершину K грань додекаэдра, пусть это $KXYZT$, и пусть ее пересекает (в центре грани) отрезок OC (для определенности). Ясно, что все отрезки CK, CX, CY, CZ и CT тоже равны, причем их длина тоже равна l. Тогда точки окружности β, описанной вокруг грани $KXYZT$, равноудалены от точки C на расстояние l.

Но окружности α и β лежат на одной сфере, а значит они имеют одинаковый радиус, откуда их центры удалены от O на одинаковые расстояния. Мы получили, что центры граней **И** и **Д** равноудалены от точки O. Осталось заметить, что вписанная в **И** сфера касается граней **И** в их центрах, и вписанная в **Д** сфера касается граней **Д** в их центрах, откуда эти сферы совпадают.

Аналогичное утверждение верно для любых двух двойственных многогранников, например для куба и октаэдра.

6. Идея решения состоит в следующем. Каждому способу обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки b, надо сопоставить способ обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки a (при этом разным способам должны соответствовать разные). Тогда вторых способов будет не меньше, чем первых. Чтобы доказать, что вторых больше, надо будет предъявить способ обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки a, который не сопоставлен никакому способу обойти доску хромой ладьей, начиная с клетки b.

Реализовать идею можно например так.

Далее способы обхода доски хромой ладьей будем называть путями.

Заметим сначала, что путей, начинающихся на клетке a и заканчивающихся на клетке b столько же, сколько путей, путей, начинающихся на клетке b и заканчивающихся на клетке a. Поэтому такие пути рассматривать далее не будем.

Занумеруем столбцы доски буквами A, B, C, ... слева направо, а строки доски занумеруем цифрами 1, 2, 3, ... сверху вниз. Каждая клетка доски получит тогда свой буквенно-цифровой номер, например клетка a — номер A_1, а клетка b — номер B_2.

Рассмотрим пути из клетки B_2. Вторая клетка такого пути — либо A_2, либо B_3, либо C_2, либо B_1. Разберем только первые два случая (остальные аналогичны).

Если вторая клетка пути — A_2 (и путь не заканчивается на клетке A_1), то его начало выглядит так: $B_2A_2A_1B_1C_1\ldots$. Сопоставим такому пути путь $A_1A_2B_2B_1C_1\ldots$ (после клетки C_1 пути совпадают).

Если вторая клетка пути — B_3 (и путь не заканчивается на клетке A_1), то возможны несколько вариантов. Далее мы их все разбираем и для каждого указываем, какой ему сопоставляется путь с началом в A_1 (троеточиями обозначаются одинаковые участки путей).

1) Пути $B_2B_3\ldots C_1B_1A_1A_2$ сопоставляем путь $A_1A_2B_2B_3\ldots C_1B_1$.

2) Пути $B_2B_3\ldots A_3A_2A_1B_1$ сопоставляем путь $A_1B_1B_2B_3\ldots A_3A_2$.

3) Пути $B_2B_3\ldots A_3A_2A_1B_1C_1\ldots$ сопоставляем путь $A_1A_2A_3\ldots B_3B_2B_1C_1\ldots$.

4) Пути $B_2B_3\ldots C_1B_1A_1A_2A_3\ldots$ сопоставляем путь $A_1B_1C_1\ldots B_3B_2A_2A_3\ldots$.

Тем самым нужное сопоставление построено. Осталось заметить, что путь, начинающийся с клетки A_1 и обходящий доску "по спирали", не сопоставляется никакому пути, начинающемуся с клетки B_2.

7. а). Докажем по индукции следующее утверждение: если число цветов n, а число точек не меньше 2^n, то существует раскраска отрезков, при которой Петя не может достигнуть цели.

При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $n-1$ цвета, докажем его для n. Разобьем точки на два множества, состоящие не менее, чем из 2^{n-1} точек каждое. В каждом из множеств покрасим отрезки в $n-1$ цвет в соответствии с индуктивным предположением. Все отрезки, соединяющие точки из разных множеств, покрасим оставшимся цветом. Если в каком-то из двух множеств нет точек, покрашенных в последний цвет, то искомый отрезок существует по предположению индукции. Если же в обоих множествах есть точки последнего цвета, то соединяющий их отрезок — искомый.

б). Докажем, что отрезки, соединяющие 121 точку можно покрасить таким образом, что Петя не сможет достигнуть цели. Занумеруем точки парами чисел (a, b), где a и b — числа от 1 до 11. При $k = 0, \ldots, 9$ отрезки между точками вида (a_1, b_1) и (a_2, b_2), где $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1) \,\vdots\, 11$, покрасим цветом $k+1$. Выберем произвольный цвет. Если две точки соединены с третьей отрезками этого цвета, то между собой они соединены отрезком того же цвета.

Таким образом, точки разбиваются на несколько множеств так, что все отрезки между точками из одного множества покрашены в выбранный цвет. При этом для любых a_1, b_1, b_2 существует ровно одно a_2 такое, что отрезок между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) покрашен в данный цвет. Поэтому для каждого цвета точки разбиваются на 11 множеств по 11 точек в каждом. Теперь покрасим оставшиеся отрезки произвольным образом.

Как бы Петя ни покрасил точки, найдутся 12 точек одного цвета. Рассмотрим разбиение на 11 множеств, соответствующее этому цвету. Найдутся две точки, попавшие в одно множество. Соединяющий их отрезок — искомый.