Предварительные решения 26 Турнира Городов.
Осенний тур, тренировочный вариант, младшие классы.

1. Ответ: нет.

Предположим противное: пусть удалось выписать целые числа от 1 до 2004 в некотором порядке так, что сумма любых 10-ти чисел подряд делится на 10.

Заменим все числа их остатками от деления на 10. Тогда из условия следует, что 11-ое число равно первому, 12-ое число равно второму, ..., 20-ое число равно десятому, 21-ое число равно 11-му (а значит равно первому), и т.д. В частности, только те остатки, которые есть в первой десятке, встречаются среди выписанных остатков. Поэтому если в первой десятке какого-то остатка нет, то он вообще не выписан, что противоречит условию (среди чисел от 1 до 2004 все остатки встречаются). Значит в первой десятке все остатки различны, но тогда сумма первых десяти чисел будет оканчиваться на 5 и не разделится на 10 (ведь всего разных остатков 10 и их сумма $0 + 1 + 2 + \ldots + 9$ равна 45). Снова противоречие.

2. Пусть шариков какого-то цвета не больше 11. Тогда остальных шариков по крайней мере $111 - 11 = 100$, и среди них нет 4 шариков различных цветов — противоречие условию.

Значит шариков каждого из цветов не меньше 12. Но тогда если взять 88 шариков, то среди них обязательно найдутся 3 разного цвета (так как $88 = 111 - 12 \cdot 2 + 1$, то есть мы не взяли всего $12 \cdot 2 - 1$ шариков, и значит целиком не взяли максимум один цвет).

Покажем, что взять 87 недостаточно. Пусть красных шариков 12, синих 12, зеленых 12 и белых 75. Тогда условие задачит выполняется: взяв 100 шариков, мы не возьмем максимум 11 шариков одного цвета, а значит возьмем по шарику каждого цвета. Но взяв все зеленые и все белые шарики, мы возьмем 87 шариков, среди которых не будет трех разноцветных.

3. Заметим, что в каждый город, отличный от A и B, Иванов столько же раз въезжал, сколько и выезжал. Но вот из начального города (A) он выезжал на один раз больше, чем въезжал, а в конечный город (B) он въезжал на один раз больше, чем выезжал. Так как Иванов при этом ровно по разу проехался по каждому маршруту, делаем вывод, что из каждого города, кроме A и B, выходит чётное число маршрутов, а из города A — нечётное, и из города B — нечётное.

Пусть Петров оказался в городе C и не может из него выехать. Это значит, что он использовал все билеты на все маршруты, выходящие из C. Если город C отличен от A и B, то из него ведет чётное число маршрутов, скажем $2k$. Но тогда Петров въезжал и выезжал из города C всего тоже четное число раз — $2kn$, чередуя въезды и выезды, и поскольку сначала въехал в C, то в последний раз выехал из C — противоречие. Значит C — это A или B, что и требовалось доказать.

4. Пусть O — центр данной окружности, l — данная прямая. Точку O легко построить циркулем и линейкой: выбираем на окружности две непараллельные хорды и проводим к ним срединные перпендикуляры. Точка их пересечения и есть O. Опустим теперь из точки O перпендикуляр на прямую l, пусть он пересекает прямую l в точке K.

Построим теперь любой квадрат $A_1B_1C_1D_1$, сторона A_1D_1 которого лежит на прямой l и делится точкой K пополам, а весь квадрат лежит в той же полуплоскости относительно l, что и данная окружность (это легко сделать циркулем и линейкой). Проведем из точки K два луча: один через точку B_1, а другой — через точку C_1.

Если $ABCD$ — искомый квадрат, сторона AD которого лежит на прямой l, то из симметрии очевидно, что точка K делит сторону AD пополам. Теперь из подобия трегольников B_1KC_1 и BKC следует, что вершина B лежит на луче KA_1, а вершина C — на луче KC_1.

Отсюда получаем способ построения искомого квадрата: проводим лучи KA_1 и KB_1

до первого пересечения их с окружностью в точках X и Y соответственно, после чего опускаем из точек X и Y перпендикуляры XZ и YT на прямую l. Тогда $ZXYT$ будет искомым квадратом. Если есть вторые точки пересечения лучей с окружностью, получим еще один удовлетворяющий условию квадрат. Лучи обязательно пересекают окружность, так как решение существует по условию.

5. Ответ: 2004 способа.

Решение 1. Заметим, что в каждом разбиении числа 2004 на приблизительно равные слагаемые найдётся не более двух разных слагаемых.

Докажем для каждого целого k от 1 до 2004, что разбить число 2004 ровно на k приблизительно равных слагаемых можно, причем единственным способом.

Докажем сначала единственность. Пусть число 2004 разбито на k слагаемых, среди которых x равны m и y равны $m+1$, причем $x+y=k$, $x>0$ (для определенности). Значит $2004 = m \cdot x + (m+1) \cdot y = m \cdot k + y$, где $0 \leq y < k$. Но тогда y определяется однозначно — это остаток от деления 2004 на k, и x определяется однозначно: $x = k - y$.

Единственность доказана, а заодно указан и способ разбиения: разделив 2004 на k с остатком, $2004 = k \cdot m + y$, $0 \leq y < k$, получаем представление числа 2004 в виде суммы $k - y$ слагаемых, равных m и y слагаемых, равных $m+1$.

Значит всего способов 2004: один — с одним слагаемым, один — с двумя слагаемыми, …, один — с 2004 слагаемыми.

Решение 2. Докажем по индукции следующее утверждение: число N можно разбить на приблизительно равные слагаемые ровно N способами.

Заметим, что в каждом таком разбиении найдётся не более двух разных слагаемых.

Для числа 1 есть всего одно разбиение: одно слагаемое 1.

Пусть утверждение доказано для некоторого числа N. Прибавив в любом разбиении числа N к одному из меньших слагаемых (или к любому, если все слагаемыен равны), единицу, получим разбиение числа $N+1$ (с тем же числом слагаемых). При этом из разных разбиений числа N получатся разные разбиения числа $N+1$.

Обратно, если в любом разбиении числа $N+1$ (кроме разбиения на $N+1$ единицу) отнять единицу от одного из больших слагаемых (или от любого, если все слагаемые равны), получим разбиение числа N (с тем же числом слагаемых). При этом из разных разбиений числа $N+1$ получатся разные разбиения числа N.

Это значит, что количество разбиений числа $N+1$ ровно на 1 больше количества разбиений числа N. По индукции утверждение доказано.

Осенний тур, тренировочный вариант, старшие классы.

1. Решение немного зависит от расположения окружностей. Разберем один из случаев: когда точка X лежит внутри треугольника ABC. Пусть верикальные углы $C'XA$ и CXA' равны α, верикальные углы $C'XB$ и CXB' равны β, и верикальные углы $A'XB$ и AXB' равны γ. Заметим, что сумма этих шести углов равна $360°$, откуда $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Рассмотрим треугольник ABC'. Его угол $C'BA$ опирается на ту же дугу, что и $C'XA$, то есть равен α. А его угол $C'AB$ опирается на ту же дугу, что и $C'XB$, то есть равен β. Так как сумма углов треугольника равна $180°$, третий угол $AC'B$ равен γ. Аналогично доказывается, что треугольник $AB'C$ имеет углы α, β и γ, и треугольник $A'BC$ имеет такие же углы. Значит, все три треугольника подобны.

2. Ответ: 66 шариков.

Пусть шариков белого цвета меньше всего (вернее, не больше, чем шариков каждого из остальных цветов).

Тогда шариков белого цвета не больше 8 (так как иначе шариков каждого цвета не меньше 9, и можно взять 8 белых, 9 синих и 9 красных: всего будет 26 шариков, но среди них не будет 10 одного цвета — противоречие с условием).

Если белых шариков ровно 8, то и еще какого-то цвета ровно 8 шариков (иначе, как и в предыдущем абзаце, берем 8+9+9=26 шариков и получаем противоречие с условием). Тогда достаточно взять 8+8+30=46 шариков: среди них обязательно найдутся 30 одноцветных.

Если же белых шариков не больше 7, то взяв любые 7+29+30=66 шариков обязательно найдем среди них не мене 59 красных и синих, а среди них — 30 одноцветных.

А 65 шариков может не хватить: пусть белых шариков 7, синих 29, а красных — 64. Тогда условие задачи выполняется: среди любых 26 шариков не меньше $26 - 7 = 19$ синих и красных, а значит не меньше 10 синих или не меньше 10 красных. С другой стороны, взяв 7 белых, 29 синих и 29 красных шариков, возьмем всего 65, среди которых нет 30 одноцветных.

3. Ответ: обязательно.

Сначала сформулируем два известных утверждения, которые будут использоваться в доказательстве.

1. Многочлен ненулевой степени принимает бесконечное количество разных значений.

2. Многочлен, не равный тождественно нулю, имеет конечное число корней (их количество не больше, чем степень этого многочлена).

Заметим теперь, что многочлен $P(P(x)) = Q(Q(x))$ — ненулевой степени; обозначим его $R(x)$. Тогда $R(x)$ принимает бесконечное количество различных значений. Так как $P(R(x)) = Q(R(x))$ при всех x (по условию), получаем, что многочлены P и Q совпадают при бесконечном количестве различных значений переменной, а значит совпадают всегда (так как иначе их разность $P - Q$ была бы многочленом, не равным тождественно нулю, и многочлен этот имел бы бесконечное количество корней).

4. Смотрите решение задачи 5 младших классов.

5. Ответ: при всех чётных N.

В дальнейших вычислениях мы будем пользоваться следующими простыми фактами:

1) среднее арифметическое чисел $1, 2, \ldots, m$ равно $(m + 1)/2$;

2) если к каждому из нескольких чисел прибавить одно и то же число k, то среднее арифметическое этих нескольких чисел увеличится также на k.

Заметим, что ни при каком нечётном N расставить числа так, как требуется в условии, не удастся, поскольку среднее арифметическое всех N чисел будет целым (оно равно $(N + 1)/2$).

Докажем, что при любом чётном N годится расстановка $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots, N, N - 1$.

Возьмем в этой расстановке группу из чётного количества чисел. Возможны два случая.

Первый случай: группа имеет вид $k + 2, k + 1, \ldots, k + 2m, k + 2m - 1$, то есть просто переставлены последовательные целые числа.

Второй случай: группа имеет вид $k + 1, k + 4, k + 3, \ldots, k + 2m, k + 2m - 1, k + 2m + 2$. Вычтем из последнего числа 1, а к первому прибавим 1. Сумма чисел не изменится, а мы снова получим переставленные последовательные целые числа.

Значит среднее арифметическое любой группы из чётного количества чисел равно среднему арифметическому чётного количества последовательных целых чисел. Но оно всегда нецелое: $((k + 1) + (k + 2) + \ldots + (k + 2m))/2m = k + (2m + 1)/2$.

Аналогично можно заметить, что среднее арифметическое любой группы из нечётного количества чисел (в нашей расстановке) на 1 больше или на 1 меньше среднего арифметического нечётного количества последовательных целых чисел. Но оно тоже всегда нецелое: $(k + (k + 1) + \ldots + (k + 2m) \pm 1)/(2m + 1) = k + 2m \pm 1/(2m + 1)$.