Предварительные решения 26 Турнира Городов.
Осенний тур, основной вариант, младшие классы.

1. Ответ. В неравностороннем треугольнике подходят точка пересечения высот, точка пересечения биссектрис и центр описанной окружности (они будут различными). В равностороннем треугольнике проведем любую высоту, тогда подойдут любые три точки на этой высоте, из которых основание (на которое опущена высота) видно под рациональным углом.

2. Ответ: обязательно.

Рассмотрим треугольники $CA'A$ и $CB'B$. В этих треугольниках $A'A = B'B$ по условию, $CB' = CA'$ как касательные к окружности, а угол C — общий. Тогда углы CAA' и CBB' либо равны, либо дополняют друг друга до $180°$. Последнее невозможно, так как сумма этих двух углов меньше суммы углов A и B треугольника ABC, а значит меньше $180°$. Поэтому углы углы CAA' и CBB' равны, а значит и треугольники CAA' и CBB' равны, откуда $AC = BC$. Аналогично получаем, что $BC = BA$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

3. Ответ: 60.

Пример: расставим коней во все клетки кроме четырех клеток центрального квадрата 2×2. Несложно проверить, что каждый конь будет бить не более семи из остальных.

Докажем теперь, что большее число коней расставить не удастся. Рассмотрим центральный квадрат 4×4. Нетрудно проверить, что любая клетка доски может атаковаться одновременно максимум четырьмя конями, расположенными внутри этого квадрата.

Если в центральном квадрате 4×4 расставить 12 коней или меньше, то всего коней будет не больше 60.

Пусть в центральном квадрате 4×4 расставлено не меньше 13 коней. Тогда каждый из них атакует 8 клеток доски, одна из которых свободна. Тогда всего свободных клеток не меньше 13:4 (так как каждая свободная клетка атакуется не более чем четырьмя конями квадрата), то есть не меньше 3,25. Значит свободных клеток минимум 4, и снова общее количество коней не больше 60.

4. Заметим, что среднее арифметическое чисел $x - y$ и $x + y$ равно среднему геометрическому чисел x/y и xy (и равно x).

С помощью перебора найдем на доске два числа a и b, среднее арифметическое которых равно среднему геометрическому оставшихся чисел c и d, то есть $(a + b)/2 = \sqrt{cd}$.

Докажем, что в паре $\{a, b\}$ одно число равно $x - y$, а другое равно $x + y$.

Рассмотрим равенство

$$\frac{(x-y)+(x+y)}{2} = \sqrt{(x/y)\cdot(xy)}.$$

Если мы поменяем в нем местами одно из чисел $x - y$, $x + y$ с одним из чисел x/y, xy, то равенство не изменится только в случае совпадения меняемых чисел: иначе одна из частей равенства увеличится, а другая — уменьшится.

Поэтому пара $\{a, b\}$ — это либо пара $\{x-y, x+y\}$, либо пара $\{x/y, xy\}$. Последнее невозможно, так как тогда среднее геометрическое чисел c и d будет равно $\sqrt{(x+y)(x-y)}$, что меньше x, а среднее арифметическое чисел x/y и xy не меньше их среднего геометрического, то есть не меньше x — противоречие.

Значит в паре $\{a, b\}$ одно число равно $x - y$, а другое равно $x + y$, откуда однозначно находим x (как среднее арифметическое a и b) и y (как разность большего из чисел a, b и числа x).

5. Проведем к окружности, вписанной в треугольник ABK, касательную, параллельную AK (но отличную от AK), пусть она пересечет сторону BC в точке M_1. Аналогично, проведем к окружности, вписанной в треугольник ACK, касательную, параллельную AK (но отличную от AK), пусть она пересечет сторону BC в точке N_1. Тогда $M_1M : MK = KN : NN_1$ (из подобия), откуда $MM_1 \cdot NN_1 = KM \cdot KN$. Но $BM > MM_1$, $CN > NN_1$, и значит $BM \cdot CN > KM \cdot KN$.

6. Пусть всего сыра 50 (фунтов). Играют I и II. R_1, R_2 — результаты I и II , $D = R_1 - R_2$. Ясно, что после разреза работает жадный алгоритм. Поэтому нарез $N(a,b) = \{10, 10-a, 10-b, 10+a, 10+b\}$ дает $R_1 = 30$, а $R_2 = 20$. Кроме того, при нарезе $\{a, b1 \geq b2, c1 \geq c2\}$ $R_1 \geq a + b2 + c2$.

Всюду далее считаем $x \leq y$, $a \leq b \leq c$. Покажем, как за I получить $R_1 \geq 30$ или $D \geq 10$.

Ход 1: делим $\{30, 20\}$. На любой ответ I может получить одну из двух позиций: $K(a) = \{20, 10+a, 10, 10-a\}$ (где $a < 5$) или $L(a) = \{20+a, 10-a, 10+a, 10-a\}$ (где $a \geq 5$).

Случай K. Если II делит 20, будет $N(a,b)$. Если II делит $10-a$ или $10+a$ так, что бо́льшая часть ≥ 10, то $R_1 \geq 20 + 10 = 30$. Если II делит $10 = x + y$, то $x \leq 5 \leq 10 - a$, $y \leq 10 + a$, поэтому $R_1 \geq 20 + x + y = 30$. Если II делит $10 + a = x + y$, где $y \leq 10$, то $x \geq a$, нарез $\{20, y \geq x, 10 + a \geq 10 - a\}$, поэтому $R_1 \geq 20 + x + 10 - a \geq 20 + a + 10 - a = 30$.

Случай L. II вынужден делить $20 + a = x + y$, нарез $\{y, 10 + a \geq x, 10 - a \geq 10 - a\}$, поэтому $R_1 \geq y + x + 10 - a = 20 + a + 10 - a = 30$.

Покажем, как играть за II чтобы получить $R_2 \geq 20$ или $D \leq 10$. Пусть первый ход был x, y. Если $x < 10$ или $x > 20$, то II делает $\{a, b, b\}$, где $a < 10$, и, повторяя ходы на равных кусках, добивается $D \leq a < 10$. Иначе II делает $\{p, q, 20\}$, где p и $q \geq 10$. Если в ответ I режет кусок 20, то II делает $N(a,b)$. Иначе перед II позиция $\{a, b, c, 20\}$, где $a + b + c = 30$. Он ходит $\{a, b, c, b, 20 - b\}$. Ясно, что $a + b \leq 20$, $b + c \geq 20$, поэтому $a \leq 20 - b \leq c$ и $R_2 = b + (20 - b) = 20$.

7. Для удобства условимся называть прямоугольники, равные A, кирпичами. Пусть A имеет размеры $a_1 \times a_2$, а B имеет размеры $b_1 \times b_2$. Пусть P — прямоугольник, подобный B, сложенный из кирпичей. Тогда он имеет размеры $(p \cdot a_1 + q \cdot a_2) \times (r \cdot a_1 + s \cdot a_2)$, где p, q, r, s — некоторые целые числа.

Предположим сначала, что отношение сторон кирпича рационально: $a_1/a_2 = m/n$, где m и n — целые числа. Тогда и отношение сторон прямоугольника P рационально: $(p \cdot a_1 + q \cdot a_2)/(r \cdot a_1 + s \cdot a_2) = (p \cdot (a_1/a_2) + q)/(r \cdot (a_1/a_2) + s)$ (числитель и знаменатель последней дроби рациональны). Значит (из подобия P и B) и отношение сторон прямоугольника B тоже рационально: $b_1/b_2 = k/l$, где k и l — целые числа. Но тогда из $k \cdot l$ прямоугольников, равных B, можно будет сложить квадрат. (Для этого располагаем подряд l прямоугольников, равных B, чтобы получился прямоугольник с вертикальной стороной b_2 и горизонтальной стороной $l \cdot b_1$; под ними — еще один такой же ряд из l прямоугольников, и так далее — всего k рядов. Получаем квадрат со стороной $l \cdot b_1 = k \cdot b_2$). Из таких квадратов можно будет сложить прямоугольник, подобный A (берем $m \cdot n$ квадратов и укладываем рядами по m квадратов, всего n рядов).

Пусть теперь отношение a_1/a_2 сторон кирпича иррационально.

Докажем лемму: все кирпичи, из которых сложен прямоугольник P, ориентированы одинаково (то есть все их длинные стороны параллельны друг другу).

Заметим сначала, что если какое-то число представимо в виде $z \cdot a_1 + t \cdot a_2$, где z и t — целые числа, то числа z и t определяются однозначно (если $z \cdot a_1 + t \cdot a_2 = z' \cdot a_1 + t' \cdot a_2$, где z' и t' — целые, то $(z - z') \cdot a_1 = (t - t') \cdot a_2$, и при $z \neq z'$, отношение a_1/a_2 будет рациональным, что противоречит предположению, а значит $z = z'$, но тогда и $t = t'$).

Пусть P имеет вершины P_1, P_2, P_3, P_4. Расположим P так, чтобы его сторона P_1P_2 была вертикальной, а сторона P_2P_3 — горизонтальной, причем P_1 — левый нижний угол прямоугольника P. Пусть к этому углу примыкает кирпич, длинная сторона которого горизонтальна. Рассмотрим самый большой прямоугольник вида P_1UVW, который составлен из кирпичей, все длинные стороны которых горизонтальны (U лежит на P_1P_2, W

— на P_1P_4).

Пусть точка V лежит внутри P. Рассмотрим кирпичи, прилегающие к стороне UV. Их длинные стороны не могут быть все горизонтальны: иначе прямоугольник $PUVW$ не самый большой. Аналогично не могут быть горизонтальными все длинные стороны кирпичей, примыкающих к стороне VW.

Если кирпичи, примыкающие к стороне UV, не вылезают за пределы стороны UV вправо, получим тогда, что длина стороны UV двумя способами представляется в виде $z \cdot a_1 + t \cdot a_2$ с целыми z и t. Значит они вылезают вправо. Но тогда кирпичи, примыкающие к стороне VW, не вылезают за пределы стороны VW вверх, и мы получаем, что длина стороны VW двумя способами представляется в виде $z \cdot a_1 + t \cdot a_2$ с целыми z и t. Противоречие.

Случай, когда точка V лежит на границе прямоугольника P, но не в вершине P_3, приводится к противоречию аналогично.

Значит V совпадает с P_3, и лемма доказана.

Но тогда отношение сторон прямоугольника B равно $(z \cdot a_1)/(t \cdot a_2)$, где z и t — целые. Пусть для определенности это b_1/b_2. Тогда $(t \cdot b_1)/(z \cdot b_2) = a_1/a_2$, и мы сможем получить прямоугольник, подобный A, расположив прямоугольники, равные B, рядами так, что все их стороны b_1 горизонтальны, в каждом ряду t прямоугольников, всего рядов z.

Предварительные решения задач 26 Турнира Городов.
Осенний тур, основной вариант, старшие классы.

1. Пусть $d \neq 0$ — период функции h (то есть, $h(x) = h(x + d)$ при любом x).

Заметим сначала, что $k \neq 0$ (так как иначе $f(x) = h(x)$, откуда $f(0) = f(d)$, а значит $0 = g(f(0)) = g(f(d)) = d$ — противоречие.

Заметим теперь, что функция f принимает все значения: по условию $f(g(y) = y$ для любого y (значение y принимается в точке $g(y)$).

Очевидно, что $g(y) = y/k + (g(y) - y/k)$. Функция y/k линейная, поэтому достаточно доказать, что функция $g(y)-y/k$ периодическая. Обозначим эту функцию $s(y)$ и докажем, что kd — период этой функции.

Заметим сначала, что $x = g(f(x))$ и $x + d = g(f(x + d)) = g(k(x + d) + h(x + d)) = g(kx + kd + h(x)) = g(f(x) + kd)$. Обозначив $f(x)$ за y получаем, что $g(y) + d = g(y + kd)$, причем последнее равенство верно для любого y (так как $f(x)$ принимает все значения). Но тогда $s(y + kd) = g(y + kd) - (y + kd)/k = g(y) + d - (y/k + d) = g(y) - y/k = s(y)$, то есть $s(y)$ — периодическая (с периодом kd), что и требовалось доказать.

2. Ответ: числа m и n оба не меньше 9, причем модуль их разности не равен 9.

Пусть хотя бы одно из чисел m и n меньше 9 (например, m). Тогда если взять кучу из $m + 1$ камня, первый вынужден будет первым ходом взять 1 камень (так как $m + 1 < 10$), после чего второй берет m камней и выигрывает — противоречие с условием. Значит, и m, и n не меньше 9.

Пусть теперь $m - n = 9$. Возьмем кучу, в которой $m + 1 = n + 10$ камней. Если первый берет 1 камень, второй берет m и выигрывает; если же первый берет 10 камней, второй берет n и выигрывает — противоречие с условием. Значит, $m - n \neq 9$, и аналогично $n - m \neq 9$.

Докажем, что при остальных значениях m и n первый выигрывает. Для этого достаточно показать, что при любом количестве камней в куче первый может сделать ход так, чтобы в куче осталось число камней, отличное и от m, и от n.

Пусть в куче k камней, и ход первого.

Если $k \leq 10$, то первый выигрывает одним ходом (вычитая 10, если $k = 10$, или 1, если $k \leq 9$).

Пусть $k > 10$. Первый может оставить в куче либо $k-1$ камень, либо $k-10$. Если в одном случае получится m, а в другом — n, модуль разности между m и n будет равен 9 — противоречие. Значит, первый сможет сделать ход так, чтобы первый после этого не выиграл одним ходом.

Число камней в куче будет уменьшатся, и в итоге первый выиграет.

3. Смотрите решение задачи 4 младших классов.

4. Ответ: окружность с центром O и радиусом $(R^2-d^2)/(2r)$, где R и r — радиусы исходных окружностей (большой и маленькой соответственно), d — растояние между их центрами (то есть OI).

Пусть M — середина хорды AB, H — основание перпендикуляра, опущенного из I на OM, X — центр описанной окружности треугольника IAB. Тогда $XB^2 = XM^2 + MB^2 = XM^2 + R^2 - OM^2$, $XI^2 = IK^2 + XK^2 = (d^2 - (OM-r)^2) + (XM+r)^2$. Но $XB = XI$ (как радиусы), и, приравнивая полученные для XB и XI выражения, получаем $R^2 = d^2 + 2r(OM + XM)$, то есть $OX = (R^2 - d^2)/(2r)$ — не зависит от выбора хорды AB. Нетрудно проверить, что все точки окружности с центром O и радиусом OX подходят.

5. Смотрите решение задачи 7 младших классов.

6. Примем угол $180°/n$ за 1, тогда сумма углов треугольника равна n. Будем описывать треугольники тройками углов. Разделим все возможные разрешенные треугольники на присутствующие (в виде частей на столе) и отсутствующие. Пусть a — наименьший из углов отсутствующих треугольников. Выберем все отсутствующие треугольники с углом a, отметим в них по одному углу a, а остальные углы в них назовем добавочными (некоторые добавочные тоже могут быть равны a). Выберем среди добавочных угол b — наибольший из кратных a (если такие есть) или просто наибольший (если кратных a нет). Итак, отсутствует треугольник (a, b, c). Докажем, что треугольник $(a, a+b, n-2a-b)$ присутствует. Сперва заметим, что угла $a+b$ среди добавочных нет — иначе мы бы выбрали его вместо b. Достаточно показать что $n-2a-b > 0$. Поскольку по выбору a угол $c \geq a$, то $n-2a-b = (a+b+c)-2a-b = c-a \geq 0$. Равенство возможно, только если $c = a$. Но тогда среди добавочных есть кратные a, значит и b кратен a, откуда и простое n кратно a — противоречие.

Разрежем присутствующий треугольник $(a, a+b, n-2a-b)$ так, чтобы угол $a+b$ разбился на части a и b, причем часть b попала в меньший треугольник с углом b. Получим меньшие треугольники $(b, a, ...)$ и $(a, n-2a-b, ...)$, то есть конечно же (b, a, c) — искомый отсутствовавший, и $(a, n-2a-b, a+b)$ — одинаковый разрезанному.

7. Сделаем инверсию с центром в точке O такую, что первая окружность переходит в равную второй. Вторая, соответственно, перейдёт в равную первой. Тогда, с одной стороны, лучи OF и OE перейдут в себя, с другой — мы имеем картинку, симметричную исходной относительно биссектрисы угла AOD, а значит, она же биссектриса угла EOF, откуда $AOE = DOF$.