СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 31 марта 2024 года

1. *Дано натуральное число n. Можно ли представить многочлен $x(x-1)\dots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами?* *(Б. Бутырин)*

Ответ: нельзя.

Решение 1. Предположим противное — существуют такие многочлены f и g, что выполнено тождество $x(x-1)\dots(x-n)=f^3+g^3$. Тогда

$$x(x-1)\dots(x-n)=(f+g)(f^2-fg+g^2). \qquad (*)$$

При $x=0,1,\dots,n$ имеем $f^3(x)=-g^3(x)$, откуда $f(x)=-g(x)$, то есть $f(x)+g(x)=0$.

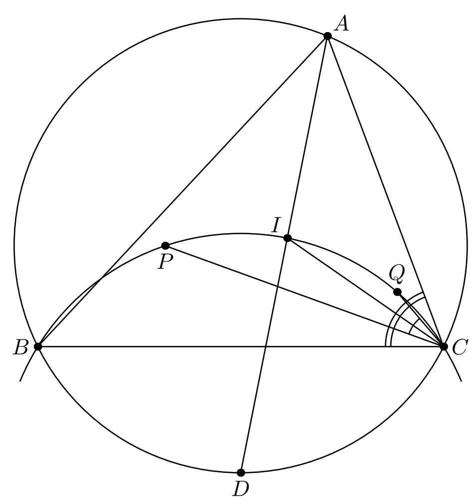
Значит, многочлен $f+g$ имеет корнями числа 0, 1, 2, …, n, откуда его степень не меньше $n+1$ (поскольку он не тождественный ноль). В частности, у одного из многочленов f и g степень не меньше $n+1$ — не теряя общности, пусть у g. Тогда, из равенства $(*)$, степень многочлена f^2-fg+g^2 равна 0, то есть это ненулевая константа. Но это невозможно, так как из представления $f^2-fg+g^2=(f-0,5g)^2+0,75g^2$ видно, что у этого многочлена старшая степень не меньше, чем максимум из степеней многочленов $(f-0,5g)^2$ и $0,75g^2$, то есть, не меньше $2(n+1)$. (Можно сказать иначе: $0,75g^2$ принимает сколь угодно большие значения, откуда $(f-0,5g)^2+0,75g^2$ — тоже, то есть, последний многочлен не может быть константой).

Решение 2. У многочленов f и g нет общих корней, иначе это будет кратный корень суммы кубов, а у многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ кратных корней нет.

Тогда многочлен f^2-fg+g^2 имеет степень $2\max(\deg f,\deg g)$ (старшие коэффициенты не сократятся) и не имеет корней, поскольку выражение a^2-ab+b^2 равно 0 только при $a=b=0$. Но такого делителя у многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ нет.

2. *Точки P, Q лежат внутри окружности ω. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает ω в точках A и D. Окружность с центром D, проходящая через P и Q, пересекает ω в точках B и C. Отрезок PQ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ACP=\angle BCQ$.* *(А. Заславский)*

Решение 1. Пусть I — точка пересечения отрезка AD и дуги $BPQC$. Так как $DB=DC$, то AD — биссектриса угла BAC и по теореме о трилистнике I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Следовательно, CI — биссектриса угла ACB. С другой стороны, так как AD — серединный перпендикуляр к PQ, то $PI=QI$, то есть CI — биссектриса угла PCQ. Из этих двух утверждений, очевидно, следует утверждение задачи.



Решение 2. Обозначим $\angle ACQ = \alpha$, $\angle QCP = \beta$, $\angle PCB = \gamma$. Необходимо доказать, что $\gamma = \alpha$.

Заметим, что $\alpha + \beta + \gamma = \angle ACB = \angle ADB = \angle BDP + \angle PDA$. Далее, $\angle BDP = 2\angle BCP = 2\gamma$, как центральный и вписанный в окружность (DPQ), а также $\angle PDA = \frac{1}{2}\angle PDQ = \frac{1}{2} \cdot 2\angle PCQ = \beta$, как центральный и вписанный в окружность (DPQ). Тогда $\alpha + \beta + \gamma = \angle BDP + \angle PDA = 2\gamma + \beta$, откуда $\gamma = \alpha$.

Примечание. В условии задачи дано, что точки P и Q лежат не только внутри окружности ω, но и внутри вписанного в неё треугольника ABC. Последнее условие на самом деле излишне. Из остальных условий задачи следует, что точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Но если обе изогональные точки лежат внутри описанной окружности, то они лежат и внутри треугольника, поскольку при изогональном сопряжении три сегмента, ограниченные сторонами треугольника и дугами описанной окружности, переходят в три угла, вертикальных углам треугольника (см. по этому поводу книгу А. Акопяна и А. Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка», М.: МЦНМО, 2011, с. 47).

3. *В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку* хорошей, *если сумма чисел строки, содержащей эту клетку, не меньше, чем сумма чисел столбца, содержащего эту клетку. Найдите наименьшее возможное количество хороших клеток.* *(А. Глебов)*

Ответ: наименьшее возможное количество хороших клеток равно N.

Пример (один из многих). Пусть в первой строке стоят единицы, а в остальных нули. Тогда все клетки первой строки хорошие, а остальные плохие.

Оценка.

Способ 1. Разобьём все клетки таблицы на N групп по N клеток так, чтобы в каждой группе все клетки находились в разных строках и разных столбцах. Пример такого разбиения для $N = 5$ см. на рисунке, для других N разбиение аналогично (например, в одну группу берём главную диагональ (идущую сверху слева вниз вправо), во вторую — диагональ над ней и число в левом нижнем углу, в третью — следующую диагональ и диагональ из двух клеток слева внизу, и т.д.).

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Предположим, что в какой-то группе все клетки плохие. Тогда для каждой клетки этой группы сумма чисел содержащей её строки меньше суммы чисел содержащего её столбца. Суммируя эти неравенства по всем клеткам группы, получаем, что сумма чисел во всей таблице, подсчитанная по строкам, меньше, чем эта же сумма, подсчитанная по столбцам – противоречие, Значит, в каждой группе есть хорошая клетка, и число хороших клеток не меньше числа групп, то есть не меньше N.

Способ 2. Допустим противное — хороших клеток может быть меньше, чем N. Докажем лемму:

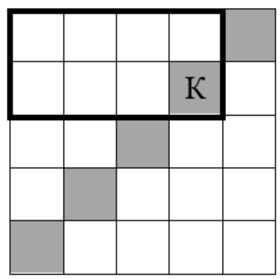
Лемма. *Если в белой таблице $N \times N$ закрасить чёрным менее N клеток, то можно будет выбрать N белых клеток так, чтобы все они были в разных столбцах и в разных строках.*

Из леммы, назвав хорошие клетки чёрными, а остальные белыми, получим противоречие: общая сумма чисел в столбцах, отвечающих N выбранным белым клеткам, больше общей суммы чисел в строках, отвечающих этим клеткам. Но в первой сумме участвуют все N столбцов, а во второй сумме — все N строк, откуда сумма всех чисел таблицы больше самой себя, противоречие.

Доказательство. Если чёрных клеток нет, задача очевидна. Иначе найдётся строка, в которой есть и чёрная клетка, и белая (так как чёрных меньше N). Вычеркнем из таблицы эту строку и столбец, проходящий через белую клетку этой строки. Осталась таблица $(N-1)\times(N-1)$, в которой чёрных клеток меньше $(N-1)$, и утверждение верно по индукции (база для доски 1×1 очевидна).

Способ 3. Переставим между собой строки таблицы так, чтобы суммы чисел по строкам убывали сверху вниз, а столбцы переставим так, чтобы суммы чисел в столбцах возрастали слева направо. При этом суммы чисел в строках и столбцах не изменятся, поэтому число хороших клеток не изменится (но эти клетки могут переместиться на другие места в таблице).

Тогда если какая-то клетка K хорошая, то и все клетки, расположенные в таблице выше и левее неё, хорошие. Все эти клетки вместе составляют прямоугольник $\Pi(K)$, у которого правая нижняя клетка – это K, а левая верхняя клетка совпадает с левой верхней клеткой таблицы (обведённый прямоугольник на рисунке).



Рассуждая как в 1-м решении, заключаем, что какая-то клетка K на большой диагонали таблицы, ведущей из её правого верхнего угла в левый нижний угол, является хорошей. Соответствующий прямоугольник $\Pi(K)$ состоит не менее чем из N хороших клеток, причём их число равно N, только если K – это правая верхняя или левая нижняя клетка таблицы (а прямоугольник $\Pi(K)$ состоит из всех клеток верхней строки или всех клеток левого столбца таблицы). Во всех других случаях число хороших клеток в прямоугольнике $\Pi(K)$ (а значит, и во всей таблице) превышает N.

4. *Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны?* *(П. Кожевников)*

Ответ: можно.

Решение 1. Достаточно найти такую точку O, что на любой прямой, проходящей через O, лежит не более одной рациональной точки. Тогда, проведя из O всевозможные лучи во все рациональные точки и удалив у каждого луча начало (от O до соответствующей рациональной точки), получим искомый набор непересекающихся непараллельных лучей.

Найти точку O можно разными способами.

Первый способ. Можно указать точку O явно — например, подойдёт точка $(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Пусть на прямой, проходящей через эту точку, есть две рациональные точки (a,b) и (c,d) (где a,b,c,d — рациональные). Тогда вектора $(a-\sqrt{2}, b-\sqrt{3})$ и $(a-c, b-d)$ пропорциональны, откуда

$$(a-\sqrt{2})(b-d)=(b-\sqrt{3})(a-c), \qquad (*)$$

откуда $a(b-d)-b(a-c)=(b-d)\sqrt{2}-(a-c)\sqrt{3}$. Возводя в квадрат и перенося заведомо рациональные слагаемые в левую часть, получим, что будет рациональным число $2(b-d)(a-c)\sqrt{6}$, что возможно только при $b=d$ или $a=c$. Но из равенства $(*)$ видим, что если выполнено хоть одно из равенств $b=d$, $a=c$, то выполнено и второе, откуда точки (a,b) и (c,d) совпадают.

Второй способ. Можно поступить иначе — доказать существование такой точки O. Проведём всевозможные прямые через пары рациональных точек. Таких прямых будет счётное количество. Так как всего направлений на плоскости несчётное количество, на ней найдётся прямая l, не параллельная ни одной из проведённых прямых. Проведённые прямые высекают на l счётное число точек, а всего на l точек несчётное количество, поэтому там ещё останутся точки, любая из них подойдёт в качестве O.

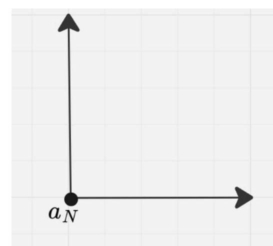
Решение 2. Заметим, что если прямая задаётся уравнением $y = kx+b$, где k — иррациональное, то на ней лежит не более одной рациональной точки. Действительно, пусть лежит хотя бы две: (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ — рациональное. Противоречие.

Так как всего рациональных чисел счётное множество, то рациональных точек тоже счётное множество. Занумеруем их: $a_1, a_2, \ldots$ Назовём набор из N лучей *хорошим*, если лучи имеют начала в точках $a_1, \ldots, a_N$, причём никакие два луча не имеют общей точки и не лежат на параллельных или совпадающих прямых, а направляющие векторы у всех лучей имеют положительные координаты (то есть угол между каждым лучом и положительным направлением оси Ox лежит в интервале от $0°$ до $90°$).

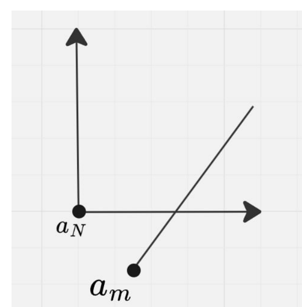
Докажем по индукции следующее утверждение: *если существует хороший набор из N лучей, то к нему можно добавить ещё один луч так, что снова получится хороший набор.*

База: $N = 1$. Проведём через $a_1 = (x_1, y_1)$ прямую с угловым коэффициентом $\sqrt{2}$, и лучом будет «верхняя половина» этой прямой.

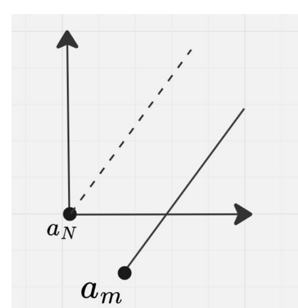
Пусть проведены нужные нам лучи через точки $a_1, \ldots, a_{N-1}$. Рассмотрим точку a_N. Проведём через неё горизонтальный и вертикальный лучи (рис. 1).



Среди всех проведённых лучей найдём луч с минимальным углом наклона к оси Ox (пусть это k_0). Попробуем выпустить из a_N луч с положительным иррациональным угловым коэффициентом, меньшим k_0. Тогда прямая, содержащая этот луч, не параллельна ни одной из прямых, содержащих предыдущие лучи (и не совпадает с этими прямыми). Такой луч может не подойти, только если он пересекает какой-то другой уже построенный луч с началом a_m и угловым коэффициентом k_m (рис. 2).



Выберем тогда такой иррациональный коэффициент $k > k_m$, что k меньше всех коэффициентов, бо́льших k_m, и выпустим из a_N луч с этим коэффициентом (на рисунке 3 он будет подыматься «круче» пунктирного луча с коэффициентом k_m). Его не могут пересечь лучи с коэффициентами, меньшими k — они пересекли бы тогда и луч, выходящий из a_m, что противоречит предположению индукции. Поэтому он не подойдёт, только если его пересекает луч с ещё бо́льшим угловым коэффициентом k_l. Тогда, аналогично предыдущему, выпустим из a_N луч с коэффициентом, большим k_l и меньшим всех коэффициентов, больших k_l, и так далее. Так как всего проведённых лучей конечное число, найдётся момент, когда мы сможем провести луч, не пересекающий остальные лучи. Переход доказан.



Взяв объединение всех хороших наборов для $N = 1, 2, 3, \ldots$ (каждый луч берём один раз), получим искомые лучи.

5. *Вписанная сфера треугольной пирамиды $SABC$ касается основания ABC в точке P, а боковых граней — в точках K, M и N. Прямые PK, PM, PN пересекают плоскость, проходящую через середины боковых рёбер пирамиды, в точках K', M', N'. Докажите, что прямая SP проходит через центр описанной окружности треугольника $K'M'N'$.* *(Ф. Ивлев)*

Решение 1. Сделаем гомотетию с центром P и коэффициентом 2. Пусть K'', M'', N'' — образы точек K', M', N', T — тока пересечения прямой SK с плоскостью ABC. Тогда $TK = TP$ как касательные к сфере, и, поскольку треугольники PKT и $K''KS$ подобны, то $SK'' = SK$. Аналогично $SM'' = SM$, $SN'' = SN$. Но $SK = SM = SN$ как касательные, следовательно S — центр окружности $K''M''N''$, а середина SP — центр окружности KMN.

Решение 2. Обозначим сферу, проходящую через точки K, M, N, с центром в точке S, через ω, вписанную сферу пирамиды — через γ, а плоскость, проходящую через середины рёбер пирамиды — через α.

Сделаем инверсию с центром в точке P, переводящую γ в α. Тогда точки K, M, N перейдут в точки K', M', N'. Так как $\omega \perp \gamma$, то образ ω будет перпендикулярен α. Следовательно, образом ω будет сфера, построенная на окружности $(K'M'N')$ как на диаметральной окружности.

Тогда утверждение задачи следует из того, что центр инверсии, центр сферы и центр её образа лежат на одной прямой.

Комментарий. Утверждение задачи является частным случаем следующего факта. Рассмотрим стереографическую проекцию сферы S на плоскость π из точки $P \in S$. Пусть Q — точка вне сферы S, а окружность ω на S, образованная касательными к S из Q, не проходит через P. Тогда образом ω будет окружность ω' с центром в точке пересечения плоскости π с лучом PQ.

6. *У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и чёрная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45, делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке? (Каждый кусок — набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1.)* *(Т. Казицына)*

Ответ: 45 кусков.

Пример. Пусть верхний слой состоит из центральной клетки. Далее пусть каждый нижележащий слой состоит из клеток предыдущего слоя и из клеток, примыкающих к ним по стороне, и имеет противоположный цвет.

Оценка.

Первый способ.

Можно считать, что первый наклеенный кусок — весь квадрат, от этого ничего не испортится. Рассмотрим все диагонали, идущие в том же направлении, что и диагональ, идущая из правого верхнего угла в левый нижний. Всего их 89 (включая угловые клетки-диагонали). Занумеруем их подряд от левого нижнего угла к правому верхнему.

Назовём диагональ *готовой*, если все её клетки в данный момент имеют тот же цвет, который будет у них в итоге, когда вся доска приобретёт шахматную раскраску.

Будем следить за следующей величиной: *количество пар соседних готовых диагоналей* (порядок диагоналей в паре не учитываем). Заметим, что в любой такой паре диагонали имеют разный цвет.

Пусть мы наклеили очередной кусок. Рассмотрим диагональ с наименьшим номером k, пересекающую этот кусок, и диагональ с наибольшим номером l, пересекающую этот кусок. Любая пара соседних диагоналей с номерами от k до l включительно не может быть готовой — они все пересекают новый кусок, а значит, в них найдутся клетки одного и того же цвета. Так же не могут образоваться новые пары готовых диагоналей, не пересекающих добавленный кусок. Значит, могут появиться максимум две пары готовых диагоналей: пара $k-1, k$ и пара $l, l+1$.

После первого хода у нас 0 пар готовых диагоналей, а в конце — 88 пар. Так как каждым ходом добавляются максимум две пары, надо сделать ещё минимум 44 хода, всего 45 ходов.

Второй способ.

Можно считать, что первый наклеенный кусок — весь квадрат, от этого ничего не испортится. Считаем его нулевым. Докажем индукцией по k утверждение:

После еще k кусков между любыми двумя клетками есть путь с не более чем $2k$ сменами цвета.

База при $k = 0$ верна.

Рассмотрим наклеивание k-го куска S. Пусть до этого между двумя клетками был путь с не более $2(k-1)$ сменами цвета. Если он не заходил в S, то он таким и остался. Иначе заменим его кусок от первой его клетки в S до последней такой клетки на путь по S между этими клетками. Тогда количество смен цвета в новом пути увеличилось не более чем на 2 по сравнению со старым. Переход доказан.

В конце между противоположными углами любой путь имеет хотя бы 88 смен цвета. Значит, поверх нулевого куска наклеено еще хотя бы 44.

Третий способ.

1. Пронумеруем все куски в порядке выкладывания.

2. Пройдёмся по кускам от 1 номера к последнему. Если встречаем кусок, пересекающийся с одним из предыдущих, то кусок с меньшим номером можем продлить на всю площадь верхнего. Далее начинаем процесс сначала, и так можно добиться, что для любых двух кусков либо нет общих клеток, либо множество клеток одного является подмножеством клеток другого. Выкидываем бессмысленные куски, типа чёрный, лежащий непосредственно на чёрном, или кусок, который в точности накрывает предыдущий.

3. Теперь можем разбить все куски на слои. Первый слой — 1 кусок. Второй слой — все куски, лежащие непосредственно на первом куске. Третий слой: все куски, лежащие непосредственно на кусках второго слоя, и т. д. Очевидно, цвета кусков будут чередоваться по слоям.

4. Рассмотрим куски 2-го слоя. Пусть для определённости он белый. Вся непокрытая ими часть 1-го слоя не будет покрыта уже ничем, поэтому представляет из себя подмножество чёрных клеток шахматной доски. Значит, расстояние между двумя ближайшими клетками двух разных белых кусков – не более 1 чёрной клетки 1-го слоя. Если расстояние нулевое, то можем объединить такие два куска – кусков станет меньше, а картинка не изменится. Если расстояние равно 1 чёрной клетке, объединим эти два белых куска, добавив между ними 1 белую клетку. И добавим один новый чёрный кусок, положив его сверху на эту клетку. Таким образом, итоговая картинка не изменилась, общее количество кусков не изменилось, во втором слое теперь на один белый кусок меньше, а в третьем – на один чёрный кусок больше. Действуя так далее, можем добиться, что во втором слое только один кусок. Далее аналогично (предварительно проведя заново действия 1-3), добиваемся, что в третьем слое – только один кусок и т.д.

5. Процесс когда-то закончится, так как каждый следующий слой покрывает лишь часть предыдущего. Заметим, что самый верхний кусок может состоять только из одной клетки (на шахматной доске нет двух соседних клеток одного цвета), обозначим эту клетку K. Рассмотрим самый дальний от этой клетки угол доски, пусть это левый нижний. Рассмотрим диагонали, идущие слева сверху вправо вниз. Пронумеруем их от дальнего угла до нашей клетки K. Так как это самый дальний угол, то K окажется минимум на 45-й диагонали. Пойдём теперь по слоям сверху вниз. Самый верхний слой заходит не ниже 45-й диагонали. Каждый следующий слой может зайти своими клетками не более чем на одну новую диагональ (т.к. клетки одного слоя одинакового цвета, а цвета диагоналей чередуются, то «перепрыгнуть» через диагональ противоположного цвета слой не может). Поэтому, чтобы покрыть дальнюю угловую клетку, нужно добавить минимум 44 слоя. Итого получается 45 слоёв, то есть требуется минимум 45 кусков.

Четвёртый способ.

ИДЕЯ: запустить процесс в обратном порядке и посмотреть, что покрытая часть «разрастается не слишком быстро». И даже проекция на диагональ покрытой части «разрастается не слишком быстро».

СХЕМА РЕШЕНИЯ.

Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_N$ — куски, занумерованные с конца, так что K_1 положили последним, K_2 — предпоследним, и т.д., K_N — первым. Положим $L_n = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$, в частности L_N — множество всех клеток доски. Ясно, что множество $K_{n+1} \setminus L_n$ не может содержать двух соседних клеток, иначе они после наклеивания в исходном процессе останутся одноцветными. (В частности, $|K_1| = 1$.)

Занумеруем подряд $1, 2, \ldots, (2n-1)$ диагонали одного направления, и пусть K'_i и L'_i — множество номеров диагоналей, пересекающихся с K_i и L_i соответственно. Так как K_i связно, то K'_i — отрезок (то есть подмножество множества $\{1, 2, \ldots, (2n-1)\}$, состоящее из нескольких последовательных чисел). Кроме того, $K'_{n+1} \setminus L'_n$ не может содержать двух соседних чисел. Действительно, предположим противное и $i, i+1 \in K'_{n+1} \setminus L'_n$. Тогда ломаная, разделяющая i-ю и $(i+1)$-ю диагонали, в силу связности K_{n+1}, разрезает некоторую доминошку, целиком лежащую в K_{n+1}, но ни одна из клеток этой доминошки не принадлежит L_n, что противоречит доказанному ранее.

Пусть L'_i состоит из t_i непродолжаемых отрезков. Покажем, что величина $s_n = |L'_n| + t_n$ при переходе от n к $n+1$ увеличивается не более чем на 2. Отсюда будет следовать нужная оценка $N \geq 45$, так как $s_1 = 2$ и $s_N = 90$.

Пусть $x = |L'_{n+1}| - |L'_n| = |K'_{n+1} \setminus L'_n|$, то есть отрезок K'_{n+1} добавляет в L'_n x чисел.

Пусть $x \geq 2$. Тогда (так как по доказанному среди этих чисел нет пары соседних чисел) отрезок K'_{n+1} накрывает хотя бы $(x-1)$ отрезков множества L'_n, значит $t_{n+1} \leq t_n - x + 2$. Получаем $s_{n+1} = |L_{n+1}| + t_{n+1} \leq (|L_n| + x) + (t_n - x + 2) = s_n + 2$, что и требовалось.

Если же $x = 1$, то очевидно $t_{n+1} \leq t_n + 1$ и $s_{n+1} = |L_{n+1}| + t_{n+1} \leq (|L_n| + 1) + (t_n + 1) = s_n + 2$, что и требовалось.