СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 31 марта 2024 года

1. Дано натуральное число n. Можно ли представить многочлен $x(x-1)\ldots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами? *Б. Бутырин*

2. Точки P, Q лежат внутри окружности ω. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает ω в точках A и D. Окружность с центром D, проходящая через P и Q, пересекает ω в точках B и C. Отрезок PQ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ACP = \angle BCQ$.

А. Заславский

3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку *хорошей*, если сумма чисел строки, содержащей эту клетку, не меньше, чем сумма чисел столбца, содержащего эту клетку. Найдите наименьшее возможное количество хороших клеток. *А. Глебов*

4. Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны?

П. Кожевников

5. Вписанная сфера треугольной пирамиды $SABC$ касается основания ABC в точке P, а боковых граней — в точках K, M и N. Прямые PK, PM, PN пересекают плоскость, проходящую через середины боковых рёбер пирамиды, в точках K', M', N'. Докажите, что прямая SP проходит через центр описанной окружности треугольника $K'M'N'$.

Ф. Ивлев

6. У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и чёрная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45, делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке? (Каждый кусок — набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1.)

Т. Казицына