

# Динамика мозаик

## ЗАДАЧА 10ЕФ

Задача 4с для любой нерациональной плоскости. Если для каждой точки  $(x, y, z)$  фигуры  $A$  в пространстве взять точку  $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$ , то получившиеся точки образуют другую фигуру, которую будем называть *дробной частью*  $A$  и обозначать через  $\{A\}$ .

*Обмотка* куба  $[0, 1)^3$  плоскостью  $L$  – дробная часть этой плоскости.

*Плиткой обмотки* будем называть дробную часть плитки на плоскости. Как и в случае прямой на клетчатой бумаге, плитки обмотки получаются сечением куба плоскостями, параллельными  $L$ , и в случае иррациональной плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии с плитками плоскости.

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Обмотка иррациональной или полуиррациональной плоскостью пересекает любой не параллельный ей отрезок в кубе  $[0, 1)^3$ , причем в бесконечном количестве точек.

*Доказательство.* Действительно, перестановкой координат мы всегда можем добиться того, чтобы плоскость не была параллельна оси  $Oz$ , т.е. записывалась уравнением  $z = \mu x + \lambda y$ . При этом среди  $\mu$  и  $\lambda$  хотя бы одно – например,  $\lambda$  – иррациональное (иначе плоскость была бы рациональной).

Сначала предположим, что данный отрезок  $I$  вертикален, то есть высекается на вертикальной прямой  $V$  с абсциссой  $x_0$  и ординатой  $y_0$  условием  $p < z < q$ . Тогда любая точка плоскости, дробная часть которой попала на прямую  $V$ , имеет вид  $(x, y, \mu x + \lambda y) = (x_0 + k, y_0 + t, \mu(x_0 + k) + \lambda(y_0 + t))$  для некоторых целых  $k$  и  $t$ . Поэтому любая точка прямой  $V$ , попавшая на обмотку, имеет вертикальную координату  $z = \{(\mu x_0 + \lambda y_0) + k\mu + t\lambda\}$ . Зафиксируем произвольное  $k$ , тогда по лемме Дирихле при некотором целом  $t$  это число попадет в интервал  $(p, q)$ .

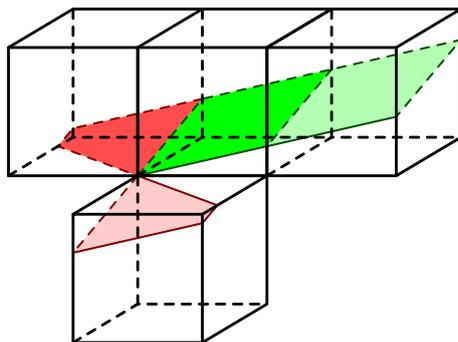
Теперь откажемся от предположения о вертикальности отрезка. В произвольном отрезке  $I$  есть подотрезок, который проецируется вдоль данной плоскости на вертикальный отрезок  $J$  в кубе  $[0, 1)^3$ , а потому вместе с  $J$  пересекается обмоткой.

Так как в любом отрезке можно выбрать бесконечно много непересекающихся подотрезков, и каждый из них будет пересекаться с обмоткой, то пересечений бесконечно много.  $\square$

Задача 3 для нерациональной плоскости: сначала сформулируем все пункты и решим их для иррациональной плоскости, а потом сделаем два простых замечания, которые решат их все для полуиррационального случая.

Задача 3а для иррациональной плоскости: могут ли на плоскости быть две равные плитки?

Ответ: да, могут. Например, рассмотрим иррациональную или полуиррациональную плоскость  $z = \mu x + \lambda y$  с положительными  $\mu < \frac{1}{4}$  и  $\lambda < \frac{1}{3}$ . Тогда пересечение с кубом  $[0, 1)^3$  и его сдвигом на один по оси  $Ox$  даст равные параллелограммы. Также в этой плоскости для каждой плитки есть равная ей, получаемая симметрией относительно начала координат.



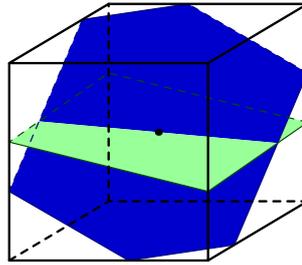
Задача 3b для иррациональной плоскости: может ли на плоскости быть или не быть бесконечно много равных плиток?

Ответ существенно отличается от одномерного случая: может быть и может не быть бесконечно много равных плиток на иррациональной плоскости.

Чтобы построить оба примера, заметим, что все направления секущих плоскостей куба делятся на два качественно разных класса:

**ЛЕММА 1.** Если плоскость  $L$  проходит через центр куба и не проходит через его вершины, то она делит вершины куба на две четверки. Каждая из этих четверок состоит либо из вершин грани куба (в этом случае назовем  $L$  *4-плоскостью*, а ее направление – *4-направлением*), либо из вершины и тройки смежных с ней вершин (в этом случае назовем  $L$  *6-плоскостью*, а ее направление – *6-направлением*).

Названия объясняются тем, что в первом случае плоскость  $L$  пересекает куб по центрально-симметричному четырехугольнику (т.е. по параллелограмму), а во втором – по центрально-симметричному шестиугольнику.



*Доказательство.* Чтобы доказать, что других конфигураций вершин по одну сторону плоскости  $L$  не бывает, заметим, что такая конфигурация не может содержать противоположных вершин. Но любая конфигурация четырех вершин куба без противоположных вершин является либо одной из двух, описанных в Лемме 1, либо “шахматной”, т.е. набором четырех попарно не смежных вершин. А шахматная конфигурация  $ABCD$  не может лежать по одну сторону плоскости, проходящей через центр куба, так как центр лежит в тетраэдре  $ABCD$ .  $\square$

Пример 4-плоскости приведен в решении прошлого пункта, пример 6-плоскости – срединный перпендикуляр к диагонали куба. Вообще, в координатах, плоскость  $Ax + By + Cz = 0$  имеет 6-направление по отношению к кубу  $[0, 1]^3$ , если максимальное из чисел  $|A|, |B|, |C|$  не превосходит суммы двух других, и 4-направление – если превосходит.

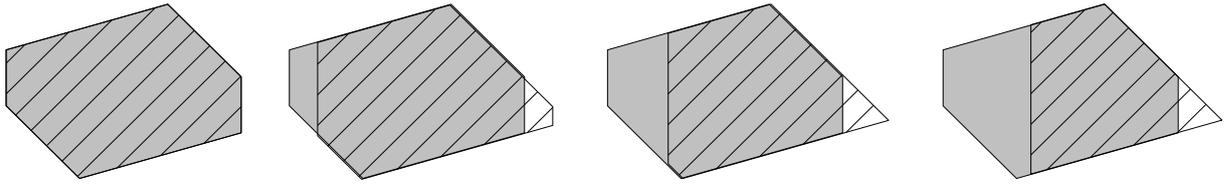
Для решения 3b на плоскости сначала рассмотрим нерациональную 4-плоскость  $L$ , проходящую через центр куба  $[0, 1]^3$ . Обмотка плоскостью  $L$  по задаче 4c задевает в бесконечном количестве точек маленький отрезок, не параллельный плоскости проходящий через центр куба. Если этот отрезок достаточно короток, то каждая точка пересечения лежит в плитке обмотки, которая достаточно близка к пересечению самой плоскости  $L$  с кубом  $[0, 1]^3$ , и потому является равным ей параллелограммом.

На любой иррациональной 6-плоскости  $L$ , наоборот, не может быть более двух равных плиток. Это следует из такого факта.

**ЛЕММА 2.** Все непустые сечения куба  $[0, 1]^3$  плоскостями данного 6-направления имеют разную площадь (а значит, не равны), если только не симметричны друг другу относительно центра куба.

*Доказательство.* Более точно, мы докажем, что если провести 6-плоскость  $L$  через центр куба, и затем начать параллельно перемещать от центра, то площадь сечения будет строго убывать до нуля.

Для доказательства убывания площади сменим систему отсчета: вместо того чтобы параллельно сдвигать плоскость, станем сдвигать куб параллельно оси  $Oz$  на расстояние  $h$  и посмотрим, что происходит с его сечением  $S_h$  на (неподвижной) плоскости  $L$ . По мере возрастания  $h$  мы увидим следующее:



Здесь сплошным цветом изображено исходное сечение  $S_0$ , а штриховкой – сечения  $S_h$  при возрастании  $h$ . Шестиугольное сечение  $S_h$  получается из  $S_0$  отрезанием и добавлением трапеции, причем высоты трапеций равны, а большее основание добавляемой трапеции равно меньшему основанию отрезаемой. Соответственно, площадь  $S_h$  меньше площади  $S_0$ . Более того, чем больше  $h$ , тем больше высоты трапеций, тем больше разница их площадей, а значит и разница площадей  $S_h$  и  $S_0$ . После того, как сечение перестало быть шестиугольным, при  $h > g$  сечение  $S_h$  просто содержится в  $S_g$ , а значит, имеет меньшую площадь.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Соображения из этих двух лемм также нужны для полного решения задачи **10с**.

Задача **3с** для иррациональной плоскости: может ли на плоскости быть или не быть ровно трех равных плиток?

Ответ: не может быть трех равных плиток на иррациональной плоскости.

Действительно, согласно Лемме 2, на обмотке 6-плоскости может оказаться не более двух равных друг другу плиток.

Аналогично лемме 2 доказывается и ее аналог для 4-плоскости: все сечения куба  $[0, 1]^3$  плоскостями данного 4-направления имеют разную площадь (а значит, не равны), если только не симметричны друг другу относительно центра куба и не равны сечению, проходящему через центр.

Этот аналог показывает, что на обмотке 4-плоскости обязательно будет бесконечно много плиток, равных центральной плитке, а среди остальных плиток будет не более двух равных друг другу.

Задача **3d** для иррациональной плоскости: может ли на плоскости быть или не быть бесконечно много попарно различных плиток?

Ответ: не может не быть бесконечно много попарно различных плиток на иррациональной плоскости.

Действительно, по задаче **4с** для плоскости, обмотка бесконечно много раз пересечет маленький отрезок, выходящий внутрь куба из его вершины перпендикулярно плоскости. Каждая из точек пересечения будет лежать в треугольной плитке обмотки, и все эти треугольники будут подобны друг другу с неединичными коэффициентами.

Задача **3a-d** для полуиррациональной плоскости: по определению, полуиррациональная плоскость переходит в себя при параллельном переносе  $P$  на некоторый ненулевой целочисленный вектор. Потому каждая плитка на ней равна бесконечному числу других плиток, получающихся из нее многократным применением параллельного переноса  $P$ .

Этим полуиррациональная плоскость похожа на рациональную, но отличается от нее применимостью задачи **4с**. Значит, все приведенные выше решения для иррациональных плоскостей, основанные на применении задачи **4с**, работают также и для полуиррациональных плоскостей.

Эти два замечания вместе дают следующие ответы в **3a-d** для полуиррациональной плоскости: (a) – могут (и должны), (b) – не может не быть, (c) – не может быть, (d) – не может не быть.

**Задача 3e** для нерациональной плоскости: опишите геометрически все плоскости (не обязательно проходящие через 0), на которых есть пара равных плиток, не равных другим.

**Ответ:** это все иррациональные плоскости, проходящие через какую-то точку с полуцелыми координатами.

Действительно, полурациональные и рациональные плоскости не подходят, так как содержат бесконечно много плиток, равных каждой данной. Наличие же ровно двух равных плиток на иррациональной плоскости говорит о том, что эти две плитки центрально симметричны (см. Лемму 2 для 6-плоскостей и ее аналог для 4-плоскостей в решении аналога пункта **3c**). Как и в решении данной задачи для прямой, центр симметрии этих двух плиток будет искомой полуцелой точкой на плоскости.

### ЗАДАЧА 11А

Мы сформулируем и докажем следующую *двумерную теорему Вейля*. Пусть хотя бы одно из чисел  $\lambda$  и  $\mu$  иррационально. Обозначим через  $W_N$  набор чисел  $\{b + k\mu + n\lambda\}$  при всевозможных натуральных  $k$  и  $n$ , не превосходящих  $N$ . Этот набор состоит из  $N^2$  чисел (среди которых, возможно, есть повторяющиеся). Тогда частота попаданий набора  $W_N$  в отрезок  $I$  стремится к длине отрезка  $|I|$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Без ограничения общности можем предположить, что  $\lambda$  иррациональное. Заметим, что в решении задачи **7d** мы доказали чуть больше, чем требовалось: для каждого иррационального  $\lambda$  и положительного  $\varepsilon$  существует такое  $N_0$ , что если выбрать из прогрессии Вейля  $\{a + n\lambda\}$  с произвольным началом  $a$  более чем  $N_0$  начальных членов, то частота их попадания в  $I$  будет отличаться от длины  $|I|$  менее чем на  $\varepsilon$ . Сила этого утверждения в том, что одно и то же  $N_0$  подходит для всех  $a$ .

При  $N > N_0$  набор  $W_N$  распадается на начальные отрезки длины  $N$  прогрессий Вейля с разностью  $\lambda$  и началами вида  $b + k\mu$ . Так как частота попадания каждого из этих отрезков в  $I$  отличается от длины  $|I|$  менее чем на  $\varepsilon$ , по Следствию 1, то же самое верно и для частоты попадания в отрезок  $I$  всего набора  $W_N$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** На самом деле можно доказать более общий факт: выберем на плоскости с координатами  $(k, n)$  произвольный выпуклый многоугольник  $P$ , и обозначим через  $P_N$  его образ при гомотетии с коэффициентом  $N$ . Тогда мы можем определить “начальный отрезок”  $W_N$  нашей двухпараметрической последовательности  $\{b + k\mu + n\lambda\}$  как множество членов, для которых точка  $(k, n)$  лежит в многоугольнике  $P_N$ . Например, если положить  $P = [0, 1]^2$ , то “начальный отрезок”  $W_N$  получится точно таким, как мы определяли в решении выше. Оказывается, что не только для  $P = [0, 1]^2$ , но и для любого другого выбора  $P$  частота попаданий набора  $W_N$  в отрезок  $I$  стремится к длине отрезка  $|I|$  при  $N \rightarrow \infty$ . Заинтересованному читателю полезно попробовать это доказать.

### ЗАДАЧА 11В

Так как плоскость  $Ax + By + Cz = 0$  иррациональна, то не содержит вертикальную ось, то есть  $C \neq 0$ . Тогда множество всех точек  $(x, y, z)$  на этой плоскости, для которых  $x$  и  $y$  содержатся в отрезке  $[0, N]$ , образует параллелограмм, который мы обозначим  $P_N$ .

Мы сформулируем и докажем следующий аналог задачи 8. Возьмем в кубе  $[0, 1]^3$  отрезок  $I$  и обозначим через  $a, b, c$  разности координат его концов. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{число точек пересечения дробной части } \{P_N\} \text{ и отрезка } I}{\text{площадь параллелограмма } P_N} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

= длина ортогональной проекции отрезка  $I$  на перпендикуляр к данной плоскости. (\*)

Здесь второе равенство тривиально. Действительно, вектор  $v$  с координатами  $(A, B, C)$  ортогонален данной плоскости. Обозначив угол между ним и вектором  $I$  через  $\alpha$ , получим, что средняя часть равенства (\*) равна  $\frac{|v \cdot I|}{|v|} = \frac{|v||I| \cos \alpha}{|v|} = |I| \cos \alpha$ , т.е. длине ортогональной проекции вектора  $I$  на прямую, параллельную вектору  $v$ .

Для доказательства первого равенства в (\*) нам понадобятся следующие наблюдения.

Во-первых, заметим, что утверждение верно для вертикального отрезка. Действительно, с учетом  $C \neq 0$  мы можем переписать уравнение плоскости как  $z = \lambda x + \mu y$ , причем среди  $\lambda$  и  $\mu$  хотя бы одно иррационально (иначе плоскость была бы рациональной). Тогда, если отрезок  $I$  задается условиями  $x = x_0, y = y_0$  и  $p < z < q$ , то требуемое утверждение превращается в двумерную теорему Вейля для прогрессии  $\{(\lambda x_0 + \mu y_0) + \lambda k + \mu n\}$  и отрезка  $[p, q]$ .

Нужно только не забыть, что в теореме Вейля частота определялась делением на число пар  $(k, n)$  в квадрате  $[1, N]^2$ , а здесь частота определяется делением на площадь параллелограмма  $P_N$ . Соответственно, ответ, даваемый теоремой Вейля, нужно разделить на отношение количества пар  $N^2$  к площади  $P_N$ , которое, очевидно, не зависит от  $N$ , и поэтому равно площади параллелограмма  $P_1$ , т.е.  $\frac{1}{(\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2})}$ .

Во-вторых, заметим, что если отрезки  $QR$  и  $ST$  в кубе  $[0, 1]^3$  параллельны плоскости  $Ax + By + Cz = 0$ , то равенство (\*) для отрезка  $QS$  равносильно равенству (\*) для отрезка  $RT$ . Действительно, левые части этих двух равенств совпадают, поскольку каждая плоскость, параллельная  $Ax + By + Cz = 0$ , пересекает или не пересекает  $QS$  и  $RT$  одновременно. Правые же части этих двух равенств совпадают, поскольку равны длине ортогональных проекций отрезков  $QS$  и  $RT$  на перпендикуляр к плоскости  $Ax + By + Cz = 0$ , а проекции эти совпадают.

В-третьих, заметим, что если произвольный отрезок  $I$  разбить на части, то равенство (\*) для отрезка  $I$  будет следовать из равенств (\*) для частей (точнее, будет получаться как сумма этих равенств).

Теперь назовем отрезки  $QS$  и  $RT$  *аналогичными*, если отрезки  $QR$  и  $ST$  параллельны плоскости  $Ax + By + Cz = 0$ , и заметим, что произвольный отрезок  $I$  в кубе  $[0, 1]^3$  можно разбить на части, аналогичные вертикальным отрезкам (например, если через все вершины куба провести плоскости, параллельные данной, то они как раз разобьют  $I$  нужным образом). Согласно сделанным выше замечаниям, равенство (\*) выполнено для вертикальных отрезков, а значит и для аналогичных им частей отрезка  $I$ , а значит и для всего отрезка  $I$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если бы мы в начале решения выбрали в качестве вертикальной другую координату, то параллелограмм  $P_N$ , фигурирующий в равенстве (\*), получился бы другим. Однако левая часть равенства (\*) от этого не изменилась бы, так как равна правой части, не зависящей от выбора параллелограмма  $P_N$ . На самом деле левая часть равенства (\*) не изменится, даже если семейство параллелограммов  $P_N$  заменить на семейство образов при гомотетиях любого выпуклого многоугольника, а не только другого параллелограмма. Заинтересованному читателю полезно попробовать это доказать, пользуясь замечанием к решению предыдущего пункта.

### Задача 11С

Определим плотность плиток на иррациональной плоскости  $Ax + By + Cz = 0$  как предел отношения

$$\frac{\text{число плиток внутри параллелограмма } P_N}{\text{площадь параллелограмма } P_N},$$

где параллелограмм  $P_N$  определен как в решении прошлого пункта.

Чтобы вычислить ее, предположим для удобства, что  $A, B$  и  $C$  положительны. Тогда число плиток внутри параллелограмма  $P_N$  равно числу пересечений его дробной части  $\{P_N\}$  с диагональю куба, соединяющей вершины  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$ . Применяя результат прошлого

пункта к этой диагонали, получим что плотность равна

$$\frac{A + B + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В общем случае числитель нужно заменить на  $|A| + |B| + |C|$ .

ЗАДАЧА 11D

Аналогично выводу задачи **9b** из **9a** получим, что ответ обратен ответу к прошлому пункту.

ЗАДАЧА 11E

Определим плотность треугольных плиток на иррациональной плоскости  $Ax + By + Cz = 0$  как предел отношения

$$\frac{\text{число треугольных плиток внутри параллелограмма } P_N}{\text{площадь параллелограмма } P_N}.$$

В предположении, что  $A, B$  и  $C$  положительны, проведем плоскости, параллельные  $Ax + By + Cz = 0$ , через все вершины куба. Эти плоскости разобьют диагональ, соединяющую вершины  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$ , на отрезки, из которых два крайних обозначим через  $I$  и  $J$ . Их длины равны и относятся к длине диагонали как  $\min(A, B, C)/(A + B + C)$ .

Заметим, что плоскость  $Ax + By + Cz = D$  пересекает куб  $[0, 1]^3$  по треугольнику если и только если она пересекает отрезки  $I$  или  $J$ , поэтому искомая плотность треугольных плиток относится к известной плотности всех плиток как  $2 \min(A, B, C)/(A + B + C)$ .

Соответственно, в общем случае ответ будет

$$\frac{2 \min(|A|, |B|, |C|)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ЗАДАЧА 11F

Искомая вероятность равна отношению плотностей треугольных и всевозможных плиток, т.е.

$$\frac{2 \min(|A|, |B|, |C|)}{|A| + |B| + |C|}.$$

ЗАДАЧА 11G

Проведем через каждую из вершин куба  $[0, 1]^3$  плоскость, параллельную данной. Эти плоскости разобьют куб на несколько частей, из которых две будут равными тетраэдрами.

Как станет ясно из решения задачи **17**, ответ равен сумме объемов этих двух тетраэдров, то

есть 
$$\frac{|ABC|}{3 \max(|A|, |B|, |C|)^3}.$$

ПОЛИЭДРЫ

Пусть полиэдры  $P$  и  $Q$  представляются объединениями (замкнутых) выпуклых многоугольников  $C_1, C_2, \dots$  и  $D_1, D_2, \dots$

ЗАДАЧА 12A

Объединение  $P$  и  $Q$  представляется как объединение всех  $C_1, C_2, \dots, D_1, D_2, \dots$ , а пересечение  $P$  и  $Q$  – как объединение всех попарных пересечений  $C_i \cap D_j$ , которые сами являются (замкнутыми) выпуклыми многоугольниками.

Компонента связности  $P$  вместе с каждой точкой  $x$  содержит все многоугольники  $C_i$ , содержащие  $x$ , а потому является объединением некоторых из  $C_1, C_2, \dots$

ЗАДАЧА 12B

Дополнение к каждому выпуклому многоугольнику  $C_i$  – это полиэдр, который мы обозначим  $\overline{C_i}$ . Действительно, если многоугольник определен как пересечение данных полуплоскостей, то его дополнение является объединением полуплоскостей, дополнительных к данным. Поэтому дополнение к полиэдру  $P$  – пересечение полиэдров  $\overline{C_i}$ , которое, по предыдущему пункту, само является полиэдром.

#### ЗАДАЧА 12С

Пусть полиэдры  $P$  и  $Q$  имеют  $p$  и  $q$  компонент соответственно. Тогда объединение  $P$  и  $Q$  может иметь любое число компонент от 1 до  $p + q$ , но не больше. Больше быть не может, так как каждая компонента объединения содержит какую-то компоненту  $P$  или  $Q$ . Приведем максимальный и минимальный примеры, остальные можно построить аналогично. В качестве  $P$  рассмотрим множество  $[0; 1] \cup \{2, 3, \dots, p\}$ . Множество  $Q_1$  состоит из  $q$  точек  $\{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$  и в объединении с  $P$  дает  $p + q$  компонент. Множество  $Q_2 = [1; p] \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{q}\}$  при объединении с  $P$  станет связным.

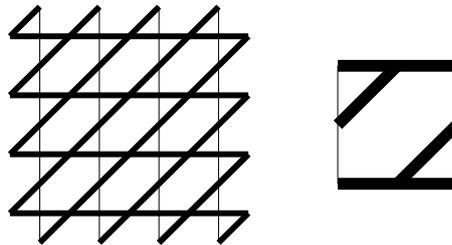
В то же время на плоскости легко построить примеры, показывающие, что пересечение  $P$  и  $Q$  и дополнение к  $P$  могут иметь любое число компонент при каждом значении  $p$  и  $q$ . Например, если множество  $P$  составлено из горизонтальной и  $N$  вертикальных прямых, а  $Q$  – наклонная прямая, то пересечение  $P \cap Q$  и дополнение к  $P$  имеют много компонент связности (более  $N$  и  $2N$  соответственно), хотя сами  $P$  и  $Q$  связны.

#### ЗАДАЧА 13А

Нет, не могут. По определению, периодическое множество получается объединением всевозможных параллельных переносов своей фундаментальной области по вертикали и горизонтали на целые расстояния.

#### ЗАДАЧА 13В

Да, может. Например:



#### ЗАДАЧА 14

Для решения пункта (а) заметим, что для треугольника понятие “внутри” определено изначально: треугольник – это выпуклый многоугольник, т.е. пересечение замкнутых полуплоскостей  $S_1, S_2, S_3$ . Согласно этому определению, внутренние точки просто включены в треугольник: множество внутренних точек треугольника – это пересечение полуплоскостей  $S_1, S_2, S_3$  без границ. Также, согласно этому определению, отрезок, соединяющий внутреннюю точку треугольника с внешней, пересечет границу одной из полуплоскостей, а значит одну из сторон треугольника.

#### ЗАДАЧА 14А

Рассмотрим первый треугольник как выпуклый многоугольник, а второй – как замкнутую ломаную. По предыдущему замечанию эта ломаная войдет в первый треугольник столько же раз, сколько и покинет его, а значит число пересечений с границей будет четно.

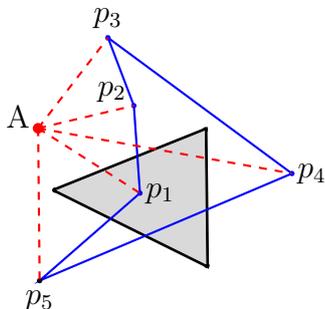
#### ЗАДАЧА 14В

Выберем точку  $A$  и соединим с ней каждую вершину данной ломаной. Очевидно, точку  $A$  можно выбрать так, чтобы ни один из соединяющих отрезков не проходил через вершины данного треугольника  $T$ , и никакие два соединяющих отрезка не оказались на одной прямой.

Тогда звенья ломаной являются основаниями треугольников  $T_1, \dots, T_n$  с общей вершиной  $A$ , и никакой треугольник  $T_i$  не проходит через вершины треугольника  $T$ . Таким образом, по пункту (а), число пересечений треугольника  $T$  с каждым из  $T_i$  четно, а искомое число пересечений отличается от него на четное число (а именно, на удвоенное число пересечений треугольника  $T$  с отрезками между  $A$  и вершинами ломаной).

#### ЗАДАЧА 14С

Аналогично пункту (b), заменим первую ломаную на набор треугольников. По пункту (б) число пересечений каждого из этих треугольников со второй ломаной будет четно.



На рисунке слева звенья ломаной  $p_1, p_2, \dots, p_5$  служат основаниями треугольников  $p_1Ap_2, p_2Ap_3, p_3Ap_4, p_4Ap_5$  и  $p_5Ap_1$  с общей вершиной в новой точке  $A$ . Видно, что каждый из отрезков  $p_iA$  встречается ровно два раза.

#### ЗАДАЧА 15А

Обозначим дорисованное ребро через  $EF$ . Это ребро лежит в некоторой компоненте дополнения к графу  $A$ , которую обозначим через  $C$ . Объединение графа  $A$  с ребром  $EF$  обозначим через  $A'$  и исследуем, как компоненты дополнения к  $A$  связаны с компонентами дополнения к  $A'$ .

Пусть две точки  $x$  и  $y$  лежат в одной компоненте дополнения к графу  $A$ , т.е. соединены избегающей его ломаной  $P$ . Если эта ломаная пересекает ребро  $EF$ , то обе точки  $x$  и  $y$  лежат в компоненте  $C$ , а если не пересекает, то обе точки  $x$  и  $y$  лежат в одной компоненте дополнения к графу  $A'$ . Таким образом, все компоненты дополнения к графу  $A$ , кроме  $C$ , остаются компонентами дополнения к графу  $A'$ .

Чтобы понять, сколько компонент дополнения к графу  $A'$  лежит в компоненте  $C$ , отложим по обе стороны ребра  $EF$  треугольники  $EFS$  и  $EFT$ , не имеющие с  $A$  общих точек кроме  $E$  и  $F$ .

Покажем, что каждая точка  $x$  компоненты  $C$  соединяется с  $S$  или  $T$  ломаной, избегающей графа  $A'$ . Из этого будет следовать, что компонента  $C$  содержит не более двух компонент дополнения к графу  $A'$  – а именно, компонент точек  $S$  и  $T$ .

Так как точка  $x$  содержится в  $C$ , то ее можно соединить ломаной  $P$  с некоторой внутренней точкой  $G$  отрезка  $EF$ . Более того, можем считать, что  $G$  – единственная точка ломаной  $P$ , содержащаяся в отрезке  $EF$ . Иначе пойдем по ломаной  $P$  от точки  $x$  до первой точки, содержащейся в  $EF$ , и отбросим остаток ломаной  $P$ .

Так как треугольники  $EFS$  и  $EFT$  вместе покрывают малую окрестность точки  $G$ , то вблизи ее на ломаной  $P$  имеется точка  $G'$ , не лежащая на отрезке  $EF$ , но лежащая в одном из двух треугольников – например, в  $EFS$ .

Поэтому участок ломаной  $P$  между точками  $x$  и  $G'$ , дополненный отрезком  $G'S$ , соединяет точки  $x$  и  $S$ , избегая графа  $A'$ .

#### ЗАДАЧА 15В

Нам осталось доказать, что точки  $S$  и  $T$  из решения предыдущего пункта лежат в разных компонентах дополнения к графу  $A'$ . Действительно, в противном случае их соединяла бы ломаная  $P$ , избегающая графа  $A'$ . Считая без ограничения общности, что в треугольниках  $EFS$  и  $EFT$  углы  $S$  и  $T$  тупые, заметим, что отрезок  $ST$  содержится в объединении треугольников  $EFS$  и  $EFT$ , а значит, избегает графа  $A$  и пересекает  $EF$  в одной точке  $G$ . Таким образом, отрезок  $ST$  дополняет ломаную  $P$  до замкнутой несамопересекающейся

ломаной  $P'$ , пересекающей граф  $A'$  в единственной точке  $G$ .

С другой стороны, в силу связности графа  $A$ , он содержит ломаную  $Q$ , соединяющую точки  $E$  и  $F$ . Дополняя  $Q$  отрезком  $EF$  до замкнутой несамопересекающейся ломаной  $Q'$ , получаем, что замкнутые несамопересекающиеся ломаные  $P'$  и  $Q'$  без общих вершин пересекаются по единственной точке  $G$ . Противоречие с предыдущей задачей.

## КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

### ЗАДАЧА 16А

Да, является: обозначим требуемое конечное множество через  $S$ , а периодическое множество, у которого фундаментальная область – дробная часть  $\{S\}$ , обозначим через  $M$ . Тогда в пересечении с данной иррациональной прямой это множество  $M$  даст как раз  $S$ .

### ЗАДАЧА 16В

Нет, аналогично прошлому пункту можем показать, что отрезок – квазипериодическое множество.

### ЗАДАЧА 16С

Пример такого множества – набор всех точек прямой, находящихся справа от точки  $(0, 0)$  на целом расстоянии от нее.

Докажем от противного: пусть это множество  $M$  получилось пересечением данной прямой  $L$  с периодическим множеством, имеющим фундаментальный полиэдр  $F$ . Так как в  $M$  бесконечно много точек, то и в полиэдре  $F$  тоже, а значит, он содержит отрезок  $I$ , пересекающийся с обмоткой  $L$ .

Но так как  $M$  не содержит отрезка, то отрезок  $I$  не параллелен прямой  $L$ . Поэтому плотность точек пересечения данной обмотки с  $I$  ненулевая, а значит,  $M$  должно иметь точки в любом достаточно длинном отрезке на прямой  $L$  – в том числе и в отрезке, лежащем слева от  $(0, 0)$ . Но слева от  $(0, 0)$  точек множества  $M$  нет, противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле никакой луч на данной прямой не является квазипериодическим множеством. Попробуйте это доказать.

### ЗАДАЧА 17А

Ответ – площадь прямоугольника. Действительно, пусть сторона прямоугольника, параллельная данной прямой, имеет длину  $a$ , а перпендикулярная ей сторона –  $b$ . Тогда каждая компонента множества  $Q$  – отрезок длины  $a$ , а плотность этих компонент равна плотности пересечений обмотки с перпендикулярной стороной, т.е.  $b$ . Поэтому средняя длина равна  $ab$ , т.е. площади  $F$ .

### ЗАДАЧА 17В

Ответ – площадь  $F$ . Доказательство состоит в применении подсказки.

### ЗАДАЧА 18А

По предыдущей задаче, ответ равен площади фундаментальной области, т.е.  $2h - h^2$ .

### ЗАДАЧА 18В

Плотность зеленых плиток равна длине ортогональной проекции зеленого прямоугольника вдоль прямой  $x + \sqrt{2}y = 0$ , т.е.  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}h$ . Аналогично, плотность желтых плиток равна сумме длин ортогональных проекций вертикального и горизонтального желтых прямоугольников, то есть  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

Заметим, что каждая компонента множества  $Q_h$ , кроме начинающейся в начале координат, состоит из чередующихся желтых и зеленых плиток, причем ее крайние плитки всегда желтые. Поэтому в каждом отрезке нашей прямой разность числа желтых и зеленых плиток

равна числу компонент множества  $Q_h$  с точностью до  $\pm 3$ . Соответственно, плотность компонент множества  $Q_h$  равна разности плотностей желтых и зеленых плиток, т.е.  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1-h)$ .

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА.

ЗАДАЧА 19А

Обозначим данную фигуру через  $P$ . Она является полиэдром, так как имеет, например, следующее клеточное разбиение: трапеция с вершинами  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,-1)$ ,  $(-1,-1)$ , все ее ребра и вершины, интервал с концами  $(1,0)$  и  $(1,1)$ , его концы, а также все клетки, симметричные перечисленным относительно прямой  $y = x$ .

Если в ее клеточное разбиение входит указанный треугольник, то и интервал  $I$  с концами  $(1,-1)$  и  $(-1,1)$ , являющийся стороной данного треугольника, входит в разбиение. С другой стороны, треугольник с вершинами  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  и  $(-1,1)$  должен содержать хотя бы одну двумерную клетку со стороной  $J$ , лежащей на  $I$ . Таким образом, у нас получились две несовпадающие клетки  $I$  и  $J$ , имеющие общие точки. Противоречие.

ЗАДАЧА 19В

Данный полиэдр  $P$  является объединением нескольких выпуклых многоугольников, каждый из которых в свою очередь является пересечением нескольких полуплоскостей. Обозначим граничные прямые всех этих полуплоскостей через  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .

Эти прямые задают клеточное разбиение плоскости. Каждая его двумерная клетка получается следующим образом: для каждого  $i$  выберем одну из двух полуплоскостей с границей  $L_i$ , и возьмем пересечение этих полуплоскостей. Каждая одномерная клетка разбиения получается следующим образом: разобьем одну из прямых  $L_i$  на интервалы остальными прямыми, и возьмем один из этих интервалов (напомним, что лучи мы также называем интервалами). Наконец, каждая нульмерная клетка разбиения – пересечение двух из прямых  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Каждая клетка построенного разбиения либо целиком лежит в  $P$ , либо целиком не лежит. Соответственно, набор тех клеток, которые лежат в полиэдре  $P$ , является его клеточным разбиением.

ЗАДАЧА 20А

Если полиэдр состоит из нескольких точек, равенство верно.

Если полиэдр является лесом (то есть объединением нескольких деревьев), то равенство также верно. Действительно, любой лес можно вырастить из конечного числа точек, дорисовывая к нему последовательно по одному листу, то есть добавляя новую вершину и соединяя ее с одной из имеющихся. А при дорисовывании листа значения обе части равенства Эйлера не изменяются.

Если полиэдр является графом, то равенство тоже верно. Действительно, любой граф можно получить из леса, последовательно применяя к его компонентам операции из задачи 15, но, согласно этой задаче, при такой операции обе части равенства Эйлера одновременно уменьшаются на 1.

Наконец, равенство верно для любого полиэдра. Действительно, любой полиэдр можно получить из графа добавлением двумерных клеток, но добавление каждой двумерной клетки, очевидно, одновременно увеличивает обе части равенства Эйлера на 1.

ЗАДАЧА 20В немедленно следует из пункта **а**, потому что правая часть тождества Эйлера не зависит от клеточного разбиения.

ЗАДАЧА 20D также немедленно следует из пункта **а**, потому что эйлерова характеристика замкнутой несамопересекающейся ломаной равна 0.

ЗАДАЧА 20С следует из определения эйлеровой характеристики, если объединение полиэдров  $P \cup Q$  разбито таким образом, что клетки этого разбиения образуют также клеточные

разбиения  $P$ ,  $Q$  и  $P \cap Q$ . Но такое клеточное разбиение всегда существует – его, например, можно построить так же, как в решении задачи **19b**.

## Задача 21

Прогулка к открытым проблемам завершена, и теперь настала очередь участников делиться с нами идеями и продвижениями по данной задаче. Мы будем рады, если это сотрудничество продлится даже после окончания Летней Конференции, и всегда готовы продолжить обсуждение:

Арина Архипова: ARHIPOVA@179.RU

Полина Белопашенцева: BELOPPOLINA@GMAIL.COM

Илья Богданов ILYA.I.BOGDANOV@GMAIL.COM

Сергей Дориченко SDORICHENKO@YANDEX.RU

Кирилл Ступаков KIR.STUPAKOV@GMAIL.COM

Александр Эстеров AESTEROV@HSE.RU