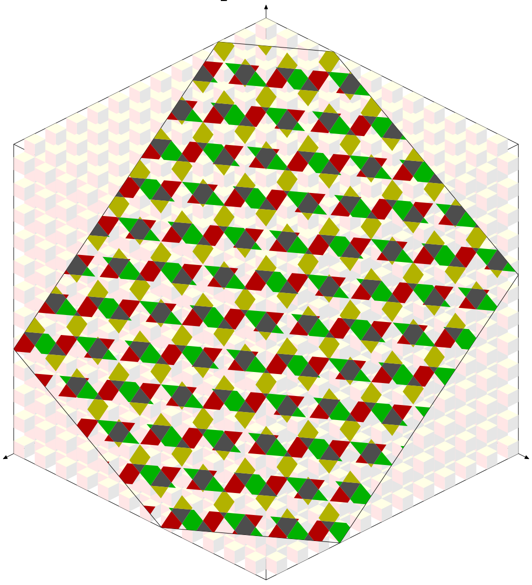
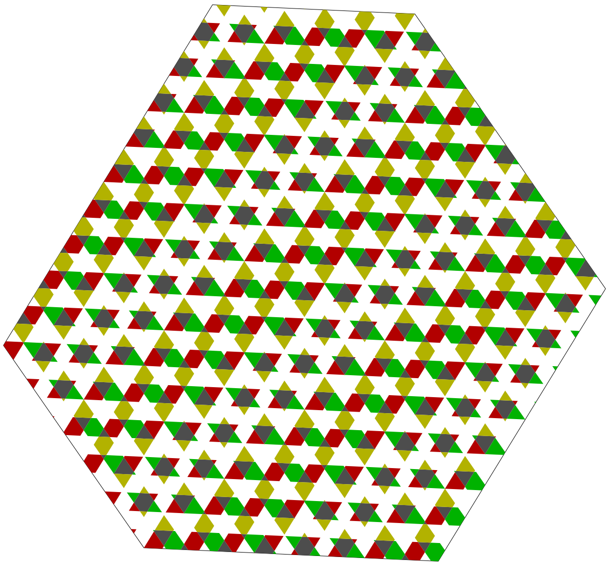
Динамика мозаик

С.А.Абрамян*, А.А.Архипова*, П.С.Белопашенцева*, И.И.Богданов, С.А.Дориченко,
Ф.А.Коган*, И.В.Нетай*, А.С.Скрипченко*, К.Р.Ступаков*, А.И.Эстеров*
(* – факультет математики НИУ ВШЭ)

Этот сюжет – прогулка до одной открытой проблемы, связанной с топологией, с динамикой и даже с физикой кристаллов. Проблема посвящена геометрии примерно следующих множеств, называемых *квазипериодическими*:





Чтобы понять постановку задачи, Вам предстоит познакомиться с первыми понятиями *эргодической теории* (§2 и §3) и *топологии* (§5 и §7 – эти два параграфа независимы от остального сюжета, с них можно даже начать).

Центральный §4 про мозаики на плоскости – введение в квазипериодическую геометрию. Ей посвящены §6 и §8. Открытая проблема – в самом конце.

Но прежде чем приступать к изображенным выше мозаикам на плоскости, мы вначале исследуем *мозаики на прямой*. Если на клетчатой бумаге нарисовать прямую, то клетки разобьют ее на отрезки.

Какие длины могут быть у этих отрезков? Насколько часто они будут встречаться?

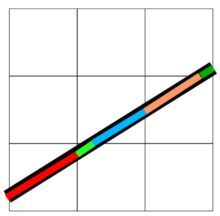
Ответу на разные аспекты этого вопроса посвящены задачи в §§1–3.

Если непонятно какое-то обозначение или вопрос, либо никак не хочет решаться задача без звездочки – спрашивайте нас!! (Мы – это Арина Архипова, Полина Белопашенцева, Илья Богданов, Сергей Дориченко, Кирилл Ступаков, Александр Эстеров)

§1 Мозаики на рациональной прямой

1. **a)** При скольких целых c прямая $6x + 8y = c$ пересекает квадрат $[0, 1]^2$?
b) Каковы длины этих пересечений? Сколько среди этих длин различных? Сколько пересечений имеют данную длину?

Прямая $ax + by = c$ разбивается линиями клетчатой бумаги на отрезки, которые будем называть *плитками*, а разбиение – *мозаикой* на прямой.



2. **a)** Сколько различных длин плиток на прямой $ax+by=c$ с данными целыми a, b и c?
b) Каков *период* этой мозаики, т.е. минимальный шаг, на который ее нужно сдвинуть вдоль прямой, чтобы мозаика перешла в себя?
c) По бильярдному столу с целочисленными длинами сторон $A \times B$ из угла по биссектисе пустили шар. Сколько раз он ударится о борта, прежде чем снова попадет в угол? Какое максимальное и минимальное расстояние он прокатится между двумя отскоками?

§2 Мозаики на иррациональной прямой

Здесь мы рассмотрим мозаики на *иррациональной* прямой $ax+by=c$, т.е. такой что a/b – иррациональное число (например, для определенности можно исследовать $x+\sqrt{2}y=c$).

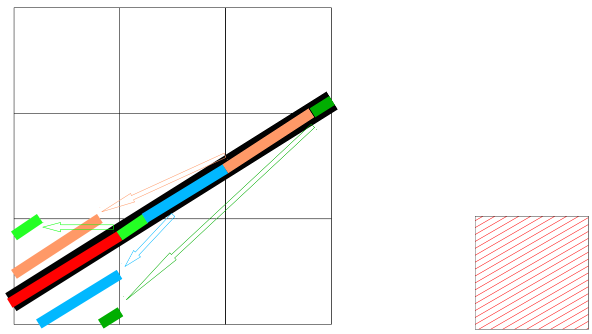
3. **a)** Могут ли быть на иррациональной прямой две плитки равной длины?
b) Может ли на ней быть или не быть бесконечно много плиток равной длины?
c) Могут ли на ней быть или не быть ровно три плитки данной длины?
d) Могут ли на ней быть или не быть бесконечно много плиток попарно различной длины?
e) Опишите геометрически все прямые, на которых есть пара плиток равной длины, отличной от всех остальных плиток.

Если у Вас возникли трудности с пунктами **b-e** (а они возникли!), то решите сначала следующую задачу:

4. **a)** Докажите, что у любой ограниченной (т.е. содержащейся в отрезке) последовательности чисел есть сколь угодно близкие члены.

b) (Лемма Дирихле) Если λ – иррациональное число, то последовательность чисел $\{\lambda\}, \{2\lambda\}, \{3\lambda\}, \{4\lambda\}, \ldots$ (где фигурными скобками обозначается дробная часть) всюду плотна на отрезке $[0,1]$, то есть в любой его подотрезок попадает хотя бы один член последовательности.

c) Разрежем прозрачную клетчатую бумагу, на которой нарисована прямая $ax+by=c$, на клетки, сложим все клетки в стопку, и посмотрим на них напросвет. Подмножество квадрата $[0,1]^2$, которое мы увидим – *обмотка квадрата* $[0,1]^2$ *прямой* $ax+by=c$ (см.рисунок ниже). Определите обмотку математически строго и докажите, что она пересекается с каждым отрезком, который не параллелен прямой $ax+by=c$. Теперь можно доделать предыдущую задачу.



§3 Пределы и средние

Напомним, что число a называется *пределом* последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если каждая окрестность a (т.е. каждый содержащий a открытый интервал) содержит все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа. В этом случае пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и говорят, что последовательность a_n *сходится* к a. Если Вы это **хорошо** знаете, следующую задачу можно пропустить.

5. Докажите, что **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, **b)** последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела,

c) если $c_n = a_n + b_n$, и a_n и b_n сходятся к a и b, то c_n сходится к $a+b$, **d)** (Лемма о двух полицейских) если $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, и a_n и b_n сходятся к a, то и c_n сходится к a.

6. Из угла бильярдного стола с иррациональным соотношением сторон $A \times B$ по биссектрисе с единичной скоростью выпускают шар. **a)** Найдите среднюю частоту ударов о борта, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{число ударов о борта за первые } T \text{ минут}}{T}.$$

b) Найдите частоту дуплетов, т.е. пар последовательных ударов о два параллельных борта.

Если с пунктом **b** сложности (а их не может не быть!), вернитесь к нему в конце параграфа. Назовем *частотой попадания* последовательности a_n в отрезок I предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{количество целых } n < N, \text{ для которых } a_n \text{ лежит в } I}{N}.$$

Наша цель в следующей задаче – доказать **теорему Вейля**:

> Для иррационального числа λ и любого a частота попадания последовательности $\{a + n\lambda\}$ в подотрезок I отрезка $[0,1]$ равна длине I.

Будем называть такую последовательность *прогрессией Вейля с разностью* λ.

7. **a)** Даны число ε и отрезок I. Укажите какое-нибудь иррациональное λ и целое N, такие что

$$\frac{\text{количество целых } n < N, \text{ для которых } \{a + n\lambda\} \text{ лежит в } I}{N}$$

отличается от длины отрезка I менее чем на ε.

Подсказка: попытайтесь взять λ очень маленьким, а N – очень большим.

b) Докажите, что в пункте **a** подходят все N начиная с некоторого N_0.

c) Докажите, что для сколь угодно малого δ любую прогрессию Вейля можно разбить на несколько подпоследовательностей, каждая из которых сама является прогрессией Вейля, причем с разностью меньше δ.

Подсказка: примените к данной прогрессии лемму Дирихле для отрезка $[0, \delta]$.

d) Докажите теорему Вейля.

8. **a)** В квадрате $[0,1]^2$ выбран отрезок I. Дайте определение частоты пересечений обмотки $[0,1]^2$ с отрезком I (напомним, что обмотка квадрата определена в конце прошлого параграфа). **b)** Найдите эту частоту для случая, когда I – вертикальный или горизонтальный отрезок данной длины. **c)** Найдите частоту для произвольного отрезка I.

9. **a)** Найдите *плотность* плиток мозаики на данной прямой $ax + by = 0$, т.е.

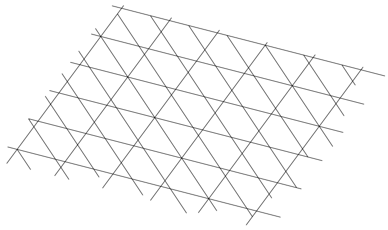
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{число плиток на отрезке длины } T, \text{ отложенном на прямой от начала координат}}{T}.$$

b) Найдите *среднюю длину* плиток мозаики на данной прямой $ax + by = 0$, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{суммарная длина плиток на отрезке длины } T}{\text{число этих плиток}}.$$

c) Найдите плотность плиток максимальной длины.

§4 Мозаики на плоскости



10. a) Дайте определение мозаики и ее плиток на плоскости $Ax + By + Cz = 0$ в пространстве.

b) Какое максимальное число углов может быть у плитки?

c) Найдите число попарно различных плиток на этой плоскости, если A, B и C целые.

d) Покажите, что для плоскости $Ax+By+Cz = 0$ выполняется ровно одно из трех условий:
– 0 является единственной точкой с целыми координатами на этой плоскости (тогда плоскость называется *иррациональной*);
– все точки этой плоскости с целыми координатами имеют вид $k \cdot v$, где v – одна из этих точек, а k – целое число (тогда назовем плоскость *полуиррациональной*);
– $\lambda A, \lambda B$ и λC – целые числа при подходящем выборе множителя $\lambda \neq 0$ (*рациональная* плоскость).

e) Сформулируйте и решите аналоги задач из §2 для иррациональной плоскости.

f) Сформулируйте и решите аналоги задач из §2 для полуиррациональной плоскости.

Промежуточный финиш

Выберем на плоскости $Ax + By + Cz = 0$ какой-нибудь (удобный Вам) многоугольник P, содержащий начало координат. Обозначим через P_T его гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом T. Эта фигура будет играть для плоскости ту же роль, что отрезок длины T на прямой в §3.

11. a) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Вейля для *двухпараметрической* последовательности $\{k\mu + n\lambda\}$.

b) Сформулируйте и решите аналог задачи **8** для иррациональной плоскости в пространстве.

c) Дайте определение и найдите плотность плиток на данной иррациональной плоскости.

d) Определите и найдите среднюю площадь плиток на данной иррациональной плоскости.

e) Определите и найдите плотность треугольных плиток в иррациональной плоскости.

f) Найдите вероятность того, что случайно выбранная плитка будет треугольной, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{число треугольных плиток в } P_T}{\text{общее число плиток в } P_T}.$$

g)$^{\times}$ Найдите вероятность того, что случайно выбранная точка плоскости окажется в треугольной плитке, т.е.

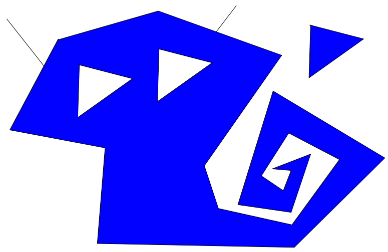
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{суммарная площадь треугольных плиток в } P_T}{\text{суммарная площадь всех плиток в } P_T}.$$

h)$^{\times}$ Определите и найдите среднюю площадь треугольной плитки на данной иррациональной плоскости.

i) Решите все пункты этой задачи с заменой треугольников на четырех-, пяти-, шести- и семиугольники.

§5 Полиэдры

Напомним, что *замкнутый (открытый) выпуклый многоугольник* – это пересечение нескольких полуплоскостей с границей (соответственно, без границы). *(Замкнутый) полиэдр* – это объединение нескольких (замкнутых) выпуклых многоугольников. *Компонента* полиэдра P – множество всех его точек, которые можно соединить с данной точкой ломаными, лежащими в P. Пример полиэдра с двумя компонентами, дополнение к которому имеет три компоненты:



12. a) Докажите, что объединение и пересечение (замкнутых) полиэдров, а также компонента связности (замкнутого) полиэдра – тоже (замкнутый) полиэдр.
b) Докажите, что дополнение к замкнутому полиэдру – тоже полиэдр, но не замкнутый.
c) Если мы знаем число компонент полиэдров P и Q, что можно сказать о числе компонент их объединения? Пересечения? Дополнения к P?

Назовем множество на плоскости *периодическим*, если оно не изменяется при параллельном переносе на целое расстояние в вертикальном и горизонтальном направлениях. Назовем пересечение периодического множества с единичным квадратом $[0,1]^2$ его *фундаментальной областью*. Назовем множество *периодическим полиэдром*, если оно периодическое, и его фундаментальная область – полиэдр.

13. a) Могут ли разные периодические множества иметь равные фундаментальные области?
b) Может ли периодический полиэдр иметь одну компоненту связности, а его фундаментальная область – две?
c)$^{\times}$ Может ли периодический полиэдр иметь две компоненты связности?

14. Если две замкнутые несамопересекающиеся ломаные не проходят через вершины друг друга, то они пересекаются в четном количестве точек. Докажите это **a)** для случая двух треугольников, **b)** для случая, когда одна из ломаных – треугольник, **c)** в общем случае.

Предупреждение: если Вы используете в решении понятия *"внутри"* или *"снаружи замкнутой несамопересекающейся ломаной"*, то Вам нужно будет дать их определение и доказать их свойства, которые вы используете (но эту задачу проще решить, не вводя такие понятия).

15. Две вершины связного графа A на плоскости соединили новым ребром, не проходящим через другие его ребра и вершины. Докажите, что при этом число компонент дополнения к графу A возросло **a)** не более чем на 1 и **b)** не менее чем на 1.

§6 Квазипериодические множества

Квазипериодическим множеством на прямой $ax + by = c$ назовем ее пересечение с периодическим полиэдром.

16. a) Является ли конечное множество на иррациональной прямой квазипериодическим?
b) Если квазипериодическое множество содержится в луче, то обязательно ли оно состоит из конечного числа точек?

c) Придумайте множество на иррациональной прямой, которое не является квазипериодическим.

Мера множества на прямой – это его "одномерная площадь". Говоря строго, если множество на прямой состоит из конечного числа непересекающихся отрезков, то его *мерой* будем называть сумму длин этих отрезков. Назовем средней длиной множества Q на прямой предел

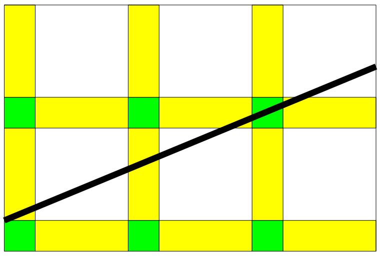
$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{мера пересечения } Q \text{ с отрезком длины } T, \text{ отложенным на прямой от точки } 0}{T}.$$

17. Пусть квазипериодическое множество Q на прямой $ax+by=c$ является пересечением этой прямой с периодическим полиэдром, имеющим фундаментальную область F.
a) Найдите среднюю длину множества Q, если F – прямоугольник, у которого одна из сторон параллельна прямой $ax+by=c$.
b) Найдите среднюю длину множества Q для произвольного F.

Подсказка: приблизьте F сверху и снизу прямоугольниками из прошлого пункта.

Замечание: теперь можно попробовать вернуться к пунктам со звездочкой в задаче **11**.

Дальше для определенности будем исследовать периодическое множество M_h, состоящее из всех точек, у которых дробная часть хотя бы одной из координат не превосходит h. На рисунке M_h изображено желтым и зеленым:



Обозначим через Q_h пересечение M_h с прямой $x+\sqrt{2}y=0$.

18. a) Найдите среднюю длину Q_h. **b)** Дайте определение и найдите плотность отрезков множества Q_h.

Подсказка: сначала решите пункт **(б)** для множеств $M_{1,h}$ и $M_{2,h}$, закрашенных зеленым и желтым соответственно. Затем выразите ответ для M_h через ответы для $M_{1,h}$ и $M_{2,h}$.

§7 Эйлерова характеристика

Применяя подсказку к предыдущей задаче, мы использовали следующее очевидное замечание: если множество на прямой разбить на несколько интервалов и точек, то разность числа точек и числа интервалов не будет зависеть от способа разбиения. Эта разность называется *эйлеровой характеристикой* множества на прямой.

Чтобы перейти к изучению квазипериодических множеств на плоскости, нам нужно распространить понятие эйлеровой характеристики на множества на плоскости.

Назовем *клеточным разбиением* полиэдра P такой набор открытых выпуклых многоугольников $T_1, T_2, T_3, \ldots$, интервалов $I_1, I_2, I_3, \ldots$ и точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (называемых вместе *клетками* разбиения), что
– каждая точка полиэдра содержится внутри ровно одной клетки, т.е. либо в одном открытом многоугольнике T_i (без его граничных точек), либо в одном интервале I_j (без его концов), либо совпадает с одной из точек P_k.
– каждая сторона и вершина каждого многоугольника T_i и каждый конец каждого интервала I_j тоже является клеткой разбиения.

– клеток конечное число, и их объединение совпадает с полиэдром P.

19. a) Из замкнутого квадрата $[-1,1]^2$ выкинули открытый квадрат $(0,1)^2$. Покажите, что получился замкнутый полиэдр, и предложите его клеточное разбиение с как можно меньшим числом элементов. Может ли быть клеткой разбиения этого полиэдра треугольник с вершинами $(-1,-1)$, $(1,-1)$ и $(-1,1)$?

b) Докажите, что каждый замкнутый полиэдр допускает клеточное разбиение.

Эйлеровой характеристикой клеточного разбиения полиэдра P назовем
$\chi(P) =$(число многоугольников)$-$(число интервалов)$+$(число вершин разбиения).

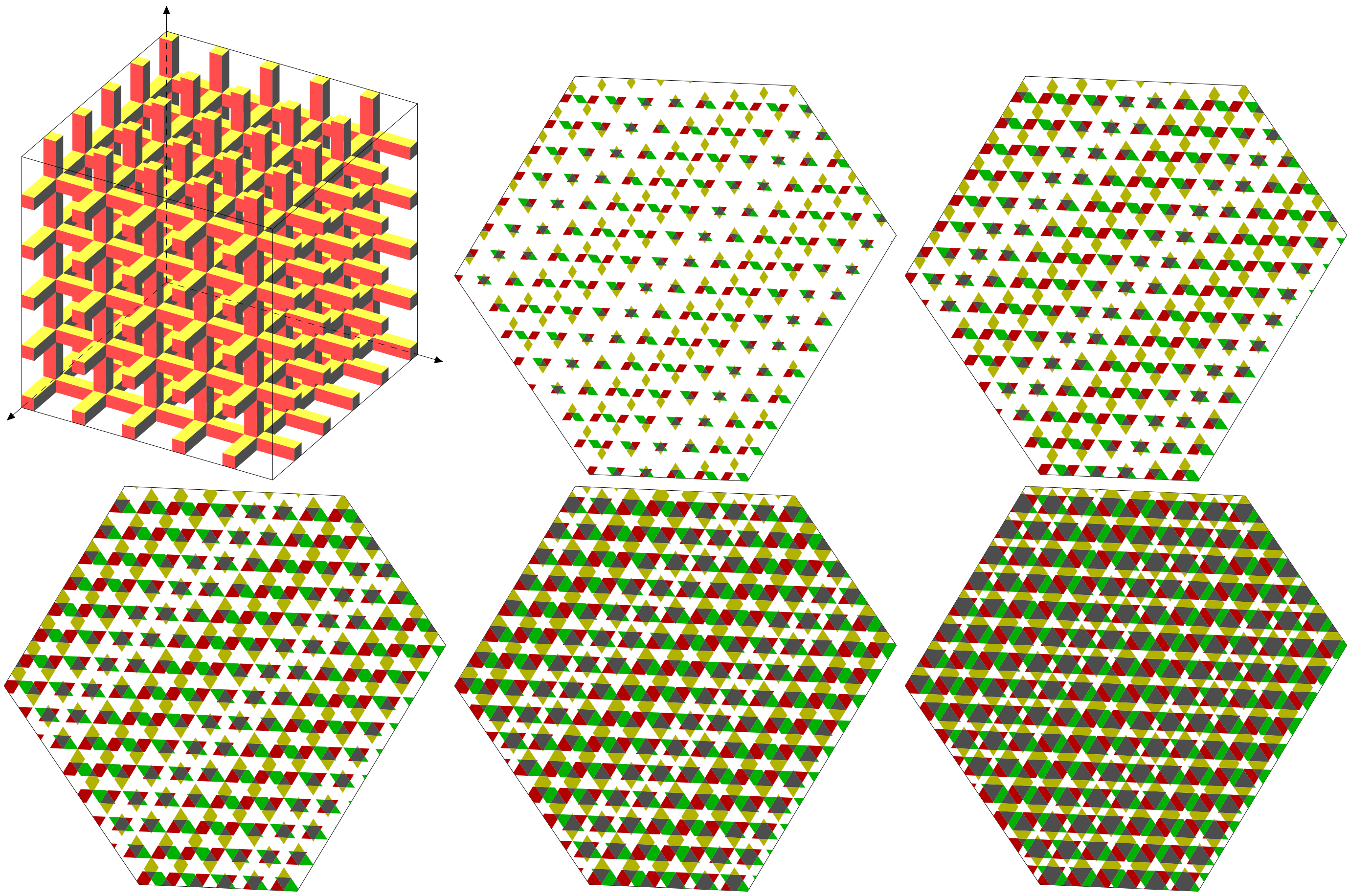
20. a) (Формула Эйлера) Эйлерова характеристика замкнутого ограниченного полиэдра равна следующему: (число его компонент)$-$(число компонент его дополнения)$+1$.

Подсказка: докажите формулу сначала для дерева, потом для графа, а потом для произвольного полиэдра, добавляя к клеточному разбиению по одной клетке.

b) Эйлерова характеристика замкнутого полиэдра не зависит от выбора его разбиения. Эйлерова характеристика многоугольника равна 1. **c)** $\chi(P) + \chi(Q) = \chi(P \cup Q) + \chi(P \cap Q)$.
d) (Лемма Жордана) Дополнение к замкнутой несамопересекающейся ломаной имеет ровно две компоненты.

§8 Квазипериодические множества на плоскости

Квазипериодическое множество на плоскости $Ax+By+Cz = 0$ – пересечение этой плоскости с периодическим множеством в пространстве. В частности, обозначим через Q_h пересечение плоскости $x+\sqrt[3]{2}y+\sqrt[4]{2}z = 0$ с множеством M_h, состоящим из всех точек, у которых дробные части хотя бы двух из трех координат не превосходят h. Множество $M_{1/4}$ и множества Q_h при $h = 0.3$, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 выглядят так:



Аналогично задаче **11**, выберем на плоскости $x + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[4]{2}z = 0$ какой-нибудь (удобный

Вам) многоугольник P, и обозначим через P_T его гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом T.

Открытая проблема. Вычислить плотность компонент квазипериодического множества Q, т.е. предел

$$\sharp Q = \lim_{T\to\infty} \frac{\text{число компонент множества } Q \text{ в } P_T}{\text{площадь } P_T}.$$

Ответ неизвестен даже для изображенных выше множеств Q_h при произвольном h.

21. a) Укажите по возможности меньшее $h_0 < 1$, для которого $\sharp Q_{h_0} = 0$. (Угадать какое-то подходящее h_0, хотя, возможно, далеко не самое маленькое, поможет серия картинок выше.)
b) Вычислите плотность эйлеровой характеристики множества Q_h, т.е.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\text{эйлерова характеристика пересечения } Q \text{ с } P_T}{\text{площадь } P_T}.$$

c) Покажите, что дополнение к множеству M_h получается из множества M_{1-h} выбрасыванием граничных точек и центральной симметрией относительно 0.
d) Как связаны $\sharp Q_h$ и $\sharp Q_{1-h}$?
e) Найдите $\sharp Q_h$ при достаточно больших и малых h, а именно при $h \geqslant h_0$ и $h \leqslant 1 - h_0$.
f) Оцените $\sharp Q_{1/2}$ как можно точнее сверху и снизу.
g) Предложите как можно большее H, для которого $\sharp Q_H > 0$, и оцените эту плотность как можно точнее снизу.
h) Рассмотрим теперь пересечение множества M_h с другой плоскостью: $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0$. Это квазипериодическое множество $\tilde{Q}_h$ изображено ниже для $h = 0.4, 0.5, 0.6$. Получите какие-либо оценки на $\sharp\tilde{Q}_h$, которые бы подтверждали или ставили под сомнение следующую гипотезу: в отличие от $\sharp Q_{1/2}$, плотность $\sharp\tilde{Q}_{1/2}$ нулевая, но $\sharp\tilde{Q}_h > 0$ при $h < 1/2$.
i) (Дискретная версия задачи Арнольда 1988-17) Получите какие-либо оценки, которые бы подтверждали или ставили под сомнение следующую гипотезу для как можно больших $h < 1/2$: для каждого h существует достаточно большое число R_h, такое что каждая ограниченная компонента множества $\tilde{Q}_h$ умещается в круге радиуса R_h.

Самая точная оценка плотностей $\sharp Q_H$ или $\sharp\tilde{Q}_{1/2}$ получит приз, а их точное вычисление или решение дискретной задачи Арнольда 1988-17 Вы сможете опубликовать в математическом журнале, как только приобретете необходимую культуру изложения на младших курсах математического факультета!