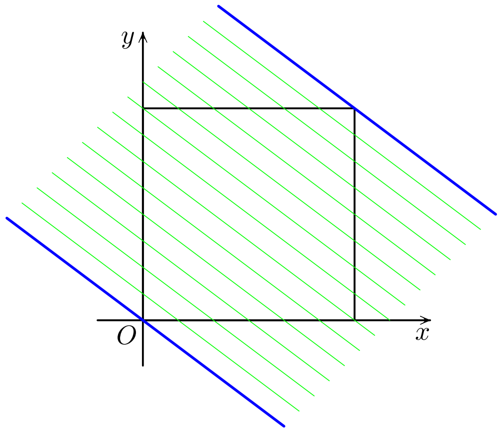
Динамика мозаик. Решения задач 1-10

Обозначения:
$\#A$ – число элементов в множестве A.
$\{x\}$ – дробная часть числа x.

Задача 1а

Рассмотрим, какие «крайние положения» может принимать прямая, пересекающая квадрат. В этом случае квадрат лежит целиком в одной из полуплоскостей, а прямая проходит ровно через одну из его вершин $(0;0)$ или $(1;1)$.



Таким образом, искомые прямые лежат между $6x+8y=0$ и $6x+8y=14$, а соответствующие целые c – все целые числа отрезка $[0;14]$. **Ответ:** 15.

Задача 1в

Возможны три случая:

(i) Прямая пересекает квадрат ровно по одной вершине. Тогда длина высекаемого отрезка равна 0. Всего таких прямых две: $6x+8y=0$ и $6x+8y=14$.

(ii) Прямая пересекает противоположные стороны квадрата (возможно, прямая при этом проходит через вершину). Все такие прямые высекают отрезки длиной $\dfrac{5}{4}$ (см. рисунок). Найдем число таких прямых. Начнем двигать прямую $6x+8y=0$, изменяя свободный член. Рассмотрим первый момент, когда прямая пересечет противоположные стороны. В этот момент прямая будет проходить через точку $(1;0)$. Ее уравнение $6x+8y=6$. В последний момент прямая будет проходить через $(0;1)$, ее уравнение $6x+8y=8$. Все искомые прямые лежат между прямыми $6x+8y=6$ и $6x+8y=8$. Получаем, что есть только 3 прямые, которые высекают отрезок длины $\dfrac{5}{4}$.

(iii) Прямая пересекает соседние стороны.

Посмотрим на первый момент, когда прямая пересекла соседние стороны, в этот момент $c=1$. Эта прямая отсекает от квадрата треугольник, обозначим его через T. Треугольник T – прямоугольный со сторонами $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$. Гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}}$ по теореме Пифагора. Соответственно, длина высекаемого прямой $6x+8y=1$ отрезка равна $\dfrac{5}{24}$ (рисунок).

Рассмотрим остальные прямые, пересекающие соседние стороны. Каждая из них делит квадрат на треугольник и пятиугольник. Заметим, что все полученные таким образом треугольники будут подобны треугольнику T, и коэффициент подобия – натуральное число.

Найдем наибольший возможный коэффициент подобия. Рассмотрим первую прямую, пересекающую противоположные стороны квадрата. Наибольший из треугольников будет отсекаться предыдущей прямой. Уравнение этой прямой $6x+8y=5$. Получаем, что прямые, лежащие между прямыми $6x+8y=0$ и $6x+8y=6$, высекают отрезки длин $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{25}{24}$. Для каждой из этих длин также найдется отрезок, высекаемый одной из прямых между $6x+8y=8$ и $6x+8y=14$.

Ответ: возможные длины 0, $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{25}{24}$ (каждого из таких пересечений две штуки), $\frac{5}{4}$ (3 пересечения данной длины). Всего различных длин 7.

Важное обозначение. Пусть задано множество F на плоскости. Его *дробной частью* $\{F\}$ будем называть множество всех точек вида $(\{x\};\{y\})$, где $(x;y)\in F$.

Задача 2a

Пусть данная прямая ℓ имеет уравнение $ax+by=c$. Мы выясним ответ на нашу задачу при всевозможных (не только целых) значениях c. Мы будем считать, что:

- НОД$(a,b)=1$, иначе можно разделить уравнение на НОД(a,b).
- $a\geq b>0$. Случаи $a=0$ и $b=0$ мы оставляем для самостоятельного разбора, остальные случаи получаются отражением в координатных осях и заменой координат x и y.

В конце решения мы перепишем ответ в форму, не зависящей от этих предположений (но условие $ab\neq 0$ останется в силе!).

Обозначим дробную часть нашей прямой через $L=\{\ell\}$. Она состоит из нескольких полуинтервалов в единичном квадрате $[0,1)^2$.
Изучим точки множества L, лежащие на оси x. Эти точки соответствуют точкам прямой ℓ с целой ординатой; поэтому их абсциссы равны $\left\{\frac{c}{a}+n\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$ при целых n. Поскольку $\frac{b}{a}$ — несократимая дробь, этих точек будет ровно a, и их множество совпадает с множеством X всех точек вида $\frac{\{c\}}{a}+\frac{k}{a}$ (при целых k), лежащих в $[0,1)$.
Аналогично, L содержит b точек на оси y. Итого, общее число точек L на осях равно $a+b-\phi$, где $\phi=0$, если ℓ не проходит через целые точки, и $\phi=1$ иначе. Это же число есть количество отрезков в L.
Однако некоторые из полученных отрезков могут быть равными. Выясним, как часто это происходит. Из соображений решения задачи **1b**, это возможно в следующих двух случаях.

(i) Все отрезки, соединяющие противоположные стороны квадрата, равны. Поскольку $a\geq b$, это могут быть лишь горизонтальные стороны.

Число таких отрезков равно числу точек множества X на отрезке $\left[0,1-\frac{b}{a}\right]$, то есть $a-b+\phi$.

(ii) Два отрезка, симметричных относительно центра квадрата. Это происходит тогда, когда ℓ содержит точку с полуцелыми координатами (см. решение задачи **3e** далее — оно не зависит от того, рациональна ли прямая).

Итак, если случай (ii) не возникает (а тогда и $\phi = 0$), то общее число различных отрезков есть $a + b - (a - b - 1) = 2b + 1$, если $a > b$, и 2, если $a = b(= 1)$.
Если же (ii) возник, то общее число отрезков, неупомянутых в (i), равно $(a+b-\phi)-(a-b+\phi) = 2(b - \phi)$, и они разбиваются на пары равных. Итого, число различных длин в этом случае есть $b - \phi + 1$, если отрезок из условия (i) существует, и $b - \phi$ иначе (последний случай возникает лишь при $a = b$ и $\phi = 0$, так что ответ в этом случае равен b).
Этот ответ в общем случае (когда $ab \neq 0$, но a и b могут иметь произвольные знаки и не быть взаимно простыми) переписывается следующим образом.

Ответ. Если прямая проходит через целую точку и $|a| \neq |b|$, то число длин отрезков есть $\dfrac{\min(|a|, |b|)}{\text{НОД}(|a|, |b|)}$.
Если прямая проходит через полуцелую точку, но не проходит через целые точки и $|a| \neq |b|$, то число длин отрезков есть $\dfrac{\min(|a|, |b|)}{\text{НОД}(|a|, |b|)} + 1$.
Если прямая не проходит через полуцелую точку и $|a| \neq |b|$, то требуемое количество равно $\dfrac{2\min(|a|, |b|)}{\text{НОД}(|a|, |b|)} + 1$.
Если же $|a| = |b|$, то число длин равно 2, за исключением случая, когда прямая проходит через полуцелую точку, но не проходит через целые; в последнем случае все плитки равны.

Замечание 1. Условие того, что прямая $ax + by = c$ проходит через полуцелую точку, равносльно тому, что прямая $ax + by = 2c$ проходит через целую точку. Это в свою очередь, равносильно тому, что $2c$ делится на $\text{НОД}(a, b)$.

Замечание 2. Приведённый выше ответ остаётся верным и при $ab = 0$.

Задача 2в

Введём те же предположения, что и в предыдущем пункте. Сначала предъявим некоторый (возможно, не минимальный) период. Заметим, что при перемещении на вектор $(-b, a)$ как прямая, так и сетка перейдут в себя; значит, и мозаика тоже. Поэтому $\sqrt{a^2 + b^2}$ является (возможно, не минимальным) периодом мозаики. Осталось выяснить, правда ли, что этот период минимален (и что делать, если это не так).
Ответ опять зависит от возникновения случаев, упомянутых в **2а**, а также от того, возникают ли плитки, *неупомянутые* в пункте (i), то есть соединяющие две точки соседних сторон некоторого квадрата решётки. отличные от вершин. Если такие *короткие* плитки не возникают (что случается при $a + b - \phi = a - b + \phi$, то есть при $b = \phi = 1$), то все плитки равны, и период равен длине плитки, т. е. $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.
Пусть теперь короткие плитки есть. Если (ii) не возник, то каждая короткая плитка возникает один раз на отрезке длины $\sqrt{a^2 + b^2}$, так что период не может быть меньше. Если же (ii) возникает, то на отрезке длины $\sqrt{a^2 + b^2}$ плиток каждой короткой длины есть ровно две. Значит, период равен либо $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, либо $d/2 = \sqrt{a^2 + b^2}/2$. Более того, в последнем случае каждая короткая плитка идёт с периодом $d/2$.
Поскольку любые две таких плитки симметричны относительно полуцелой точки, а полуцелые точки идут также с периодом, делящимся на $\sqrt{a^2 + b^2}/2$, получаем, что период полуцелых точек обязан быть равен $\sqrt{a^2 + b^2}/2$. Отсюда уже следует, что есть ровно одна длина коротной плитки, то есть опять $b = 1$. Теперь нетрудно понять, что более короткий период получается лишь при $a = b = 1$, если c — полуцелое число, не являющееся целым.
Осталось разобраться, когда возникает последний случай. Заметим, что в этом случае полуцелые точки расположены на прямой ℓ на расстояниях $\sqrt{a^2 + b^2}/2$ друг от друга. Если теперь существует коротний отрезок, то такие отрезки расположены ровно посередине между полуцелыми точками (иначе период $d/2$ невозможен). Однако нетрудно понять, что рядом с

коротким отрезком обязательно присутствует короткий. Теперь несложно понять, что данный случай возможен лишь когда $|a| = |b| = 1$, а c — полуцелое число (не являющееся целым).

Ответ. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\text{НОД}(a,b)}$, за исключением следующих случаев:

- если $a = b$, c не делит a, но $2c$ делит, то период равен $1/\sqrt{2}$;
- Если a делится на b и прямая проходит через целую точку, то период равен $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Задача 2c

Будем считать, что длины сторон бильярда взаимно просты. Остальные случаи получаются из взаимно простого растяжением в некоторое число раз, при этом число ударов сохраняется, а длины отрезков увеличиваются в то же число раз. Так же считаем, что $B < A$.
«Распрямим» траекторию шара. Каждый раз, когда шар ударяется о борт, будем отражать стол относительно прямой, проходящий через этот борт. Поскольку угол падения шара равен углу отражения, траектория шара станет прямой $y = x$ на плоскости с сеткой из прямоугольников.
Произведем над плоскостью следующие операции: сожмем по координатам x и y в $\dfrac{1}{A}$ и $\dfrac{1}{B}$ раз соответственно. При этом сетка из прямоугольников станет привычной целочисленной сеткой, а прямая $y = x$ перейдет в прямую ℓ с уравнением $By = Ax$.
Каждому отрезку между двумя отражениями от бортов будет соответствовать отрезок мозаики, расположенный между точкой $(0, 0)$ и следующей целочисленной точкой на ℓ (эта точка есть (B, A)). Всего ненулевых отрезков $A + B - 1$. Сопоставим каждому ненулевому отрезку следующий за ним удар о борт. Тогда каждому отрезку кроме последнего сопоставится удар. Получаем, что ударов на один меньше, чем ненулевых отрезков, то есть $A + B - 2$ ударов.
Осталось разобраться с минимальным и максимальным пробегом шара. Заметим, что при сжатии отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, не меняется. Тогда наименьший/наибольший отрезок изначально будет наименьшим/наибольшим после сжатия. Наибольший отрезок, соединяющий две противоположных стороны квадрата, реализуется на первом шаге (когда шар идёт из угла к противоположной стороне). Наименьший же ровно в $\min(A, B)$ раз меньше.
Итого, в общем случае мы получаем следующий ответ.

Ответ. Количество ударов о борта равно $\dfrac{A+B}{\text{НОД}(A,B)} - 2$. Наибольший пробег равен $\sqrt{2} \cdot \min(A, B)$, наименьший — $\sqrt{2} \cdot \text{НОД}(A, B)$.

Решение Задачи 3 расположено после задачи 4.

Задача 4a

Докажем, что для данного $\varepsilon > 0$ найдется пара членов последовательности на расстоянии меньше ε. Пусть последовательность (x_n) ограничена снизу числом a, а сверху — b. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$. Разделим отрезок на n равных частей. По принципу Дирихле среди первых x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} найдется по крайней мере два, попавших в одну часть. Расстояние между ними не превосходит $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Задача 4в

Если $\{k\lambda\} = \{m\lambda\}$ для некоторых $k \neq m$, то число $(m-k)\lambda$ целое, то есть λ рационально, что невозможно. Значит. все члены нашей последовательности различны.
Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha;\beta] \subseteq [0;1]$ и докажем, что в него попадет какое-то число вида $\{k\lambda\}$. Для этого по предыдущему пункту найдем члены последовательности $\{k\lambda\}$ и $\{m\lambda\}$ (при некоторых $k > m$) на расстоянии менее $\beta - \alpha$; обозначим их разность через $\mu = \{k\lambda\} - \{m\lambda\}$; тогда $|\mu| < \beta - \alpha$. Заметим, что наша последовательность содержит подпоследовательность чисел вида $\{n\mu\} = \{n(k-m)\lambda\}$. Первые $[1/\mu]$ членов этой новой последовательности разбивают отрезок $[0;1]$ на подотрезки длины менее $|\mu| < \beta-\alpha$, поэтому отрезок $[\alpha;\beta]$ не может целиком попасть ни в один из этих подотрезков. Значит, отрезок $[\alpha;\beta]$ содержит одну из разделяющих точек вида $\{n\mu\} = \{n(k-m)\lambda$.

Задача 4c

Обмоткой квадрата прямой $ax + by = c$ назовём дробную часть прямой $ax + by = c$ (см. обозначение перед задачей **2a**).

Пусть, без ограничения общности, $ab < 0$. Рассмотрим произвольный отрезок I, не параллельный нашей прямой ℓ. Спроецируем I параллельно ℓ на положительные лучи координатных осей; получится либо один отрезок, либо объединение двух отрезков.
Пусть для определённости в проекции есть отрезок J на оси x. Нам достаточно показать, что этот отрезок содержит точку обмотки (тогда отрезок обмотки, содержащий эту точку, пересекает I). Точки обмотки на оси x — это ровно точки вида $\left\{\frac{c}{a} + n\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$. Поскольку $\frac{b}{a}$ иррационально, из леммы Дирихле следует, что одна из этих точек лежит в J, что и требовалось доказать.

Задача 3

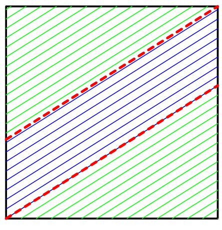
В дальнейшем под *плиткой обмотки* мы подразумеваем дробную часть плитки на прямой.

Задача 3a

Ответ. Да, может.
Например, если прямая проходит через целую точку A, то две плитки, содержащие A, симметричны относительно неё и поэтому равны (а также будут равными любые две плитки, симметричные относительно A). См. также следующий пункт.

Задача 3b

Ответ. Обязательно найдётся бесконечное число плиток равной длины.



Пусть k — угловой коэффициент нашей прямой; без ограничения общности, $0 < k < 1$. Рассмотрим обмотку квадрата нашей прямой. Согласно **4c**, в ней найдётся бесконечно много плиток, проходящих через точки вида $(0, y)$, где $0 < y < 1-k$ (поскольку в интервал $(0, k)$ можно вложить бесконечно много попарно непересекающихся отрезков). Другие концы этих плиток будут иметь вид $(1, y+k)$, то есть все эти отрезки получаются друг из друга параллельными переносами и потому имеют равные длины.

Задача 3c

Ответ. Не может быть ровно трех плиток равной длины.

Предположим противное: есть ровно три плитки некоторой длины d. Рассмотрим расположение дробных частей этих плиток в обмотке. Возможны два случая.

(i) Одна из них соединяет две противоположных стороны. Тогда, как показано в **3b**, существует и бесконечно много плиток такой длины. Противоречие.

(ii) Каждая из плиток соединяет две соседних стороны. В этом случае существует ровно два сечения квадрата, параллельных нашей прямой и имеющих длину d, и эти сечения симметричны относительно центра квадрата. Тогда две из плиток соответствуют одному и тому же сечению, что невозможно для иррациональной прямой.

Задача 3d

Ответ. Обязательно найдётся бесконечно много плиток попарно различной длины.
Опять же предположим, что угловой коэффициент k нашей прямой лежит в $(0,1)$. Тогда из **4c** в обмотке существует бесконечно много плиток с концами на нижней стороне квадрата, и все они имеют попарно различные длины.

Задача 3e

Ответ. Ровно две плитки некоторой длины найдутся тогда и только тогда, когда прямая проходит через полуцелую точку (т. е. точку, удвоенные координаты которой — целые числа).
Пусть прямая ℓ проходит через полуцелую точку $(u/2, v/2)$. Тогда вместе с точкой (x,y) прямая содержит и точку $(u-x, v-y)$. Значит, вместе с каждой плиткой обмотка квадрата $[0,1]^2$ прямой ℓ содержит и плитку, симметричную ей относительно центра квадрата (мы считаем, что плитки не содержат своих концов, то есть их дробные части лежат в $(0,1)^2$). Поскольку в обмотке существует плитка некоторой длины d, соединяющая две соседних стороны, в обмотке (а значит, и на прямой) будут ровно две плитки длины d.
Пусть, наоборот, в обмотке существуют ровно две плитки некоторой длины d. Из решения **3c** видно, что плиток, соединяющих две противоположных стороны квадрата, бесконечно много, и они все имеют равные длины. Значит, каждая из наших плиток соединяет две соседних стороны квадрата. Как уже было отмечено, в этом случае дробные части плиток должны быть симметричны друг другу относительно центра квадрата $[0,1]^2$. Это означает, что при некоторых $x, y \in [0,1)$ прямая содержит точки (k_1+x, ℓ_1+y) и (k_2-x, ℓ_2-y), где $k_i, \ell_i \in \mathbb{Z}$. Но тогда и середина отрезка между этими точками лежит на прямой. Осталось заметить, что эта середина имеет полуцелые координаты $\frac{k_1+k_2}{2}$ и $\frac{\ell_1+\ell_2}{2}$.

Задача 5

Для начала заметим, что в каждом открытом интервале, содержащем a, найдётся подынтервал вида $O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Поэтому достаточно проверять определение предела лишь для интервалов такого вида. Такой интервал называется *ε-окрестностью* числа a.

Задача 5a

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное N, большее $\frac{1}{\varepsilon}$ (например, годится $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$). Тогда при всех $n > N$ имеем $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Это значит, что все члены последовательности, кроме, возможно, первых N членов, содержатся в $O_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Задача 5b

Предположим противное: у последовательности a_n есть некоторый предел a; положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. При любом n имеем $|a_n - a_{n+1}| = 2$, так что никакие два последовательных элемента последовательности не могут попасть в интервал длины 1. Итак, вне $O_{1/2}(a)$ находится бесконечно много членов последовательности — противоречие.

Задача 5c

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ числа a_n и b_n находятся в $\varepsilon/2$-окрестностях чисел a и b соответственно. Иначе говоря, $|a_n - a| < \varepsilon/2$ и $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Значит, $|c_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значит, при тех же значениях n число c_n находится в $O_\varepsilon(a+b)$.

Задача 5d

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ числа a_n и b_n лежат в $O_\varepsilon(a)$, то есть $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$. Таким образом, при тех же значениях n число c_n также находится в $O_\varepsilon(a)$.

Задача 6

Совершим те же действия, что и в начале решения **2c**: «распрямим» траекторию шара и «сожмём» всю картинку в $\frac{1}{A}$ раз по горизонтали и в $\frac{1}{B}$ раз по вертикали. В результате мы получим плоскость, разграфлённую на единичные квадраты, на которой выпрямленная траектория шара окажется прямой ℓ с уравнением $Ax = By$. Её угловой коэффициент иррационален, так что $(0,0)$ — единственная целая точка на ℓ. Наконец, шар будет двигаться по ℓ с вектором скорости $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right)$.

Задача 6a

Для начала заметим, что $\lim_{n\to\infty} \frac{[an]}{n} = a$ по лемме о двух полицейских (поскольку $a - \frac{1}{n} = \frac{an-1}{n} \leq \frac{[an]}{n} \leq \frac{an}{n} = a$).
Моменты ударов исходного шара о борта соответствуют моментам, когда при движении по ℓ шар попадает на линии сетки. За первые T минут он встретит $\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right]$ вертикальных и $\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ горизонтальных прямых. Следовательно, искомая средняя частота равна

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{A\sqrt{2}} + \frac{1}{B\sqrt{2}}.$$

Задача 6b

Будем считать, что $A < B$ (случай $A > B$ аналогичен).
После выпрямления траектории дуплеты соответствуют ситуациям, когда ℓ пересекает две противоположные стороны одной клетки. Так как угловой коэффициент прямой ℓ меньше 1, она не может пересечь подряд две горизонтальных стороны.
Выберем некоторый момент T. Рассмотрим, в каком порядке идут встречи шара с вертикальными и горизонтальными прямыми за первые T минут. Как замечено выше, перед каждой из $\left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ «горизонтальных» встреч идёт «вертикальная». После каждой же из остальных $D = \left[\frac{T}{A\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{T}{B\sqrt{2}}\right]$ «вертикальных» встреч идёт тоже «вертикальная» (если наша «вертикальная» встреча — не последняя). Итого, количество дуплетов за рассматриваемый период не больше D и не меньше $D-1$, то есть расположено между числами

$$\frac{T}{A\sqrt{2}} - \frac{T}{B\sqrt{2}} - 2 \qquad \text{и} \qquad \frac{T}{A\sqrt{2}} - \frac{T}{B\sqrt{2}} + 1.$$

Отсюда по лемме о двух полицейских получаем, что частота дуплетов равна $\left|\frac{1}{B\sqrt{2}} - \frac{1}{A\sqrt{2}}\right|$ (в этой формуле уже учтён и случай $A > B$).

Замечание. Другое решение задачи 6b) можно получить, воспользовавшись теоремой Вейля. Примеры использования теоремы Вейля в подобных ситуациях можно увидеть в решениях задачи 8.

Задача 7а

Зададимся иррациональным числом $\lambda < \frac{1}{2}$. Будем брать члены нашей последовательности $\{a + n\lambda\}$ до тех пор, пока они не сделают "полный круг" по отрезку $[0, 1]$, т.е. пока $n\lambda$ не превысит 1. Количество N членов последовательности, которое мы при этом отсчитаем, будет на 1 больше целой части числа $1/\lambda$, т.е. λ будет заключено между $\frac{1}{N}$ и $\frac{1}{N-1}$.
Мы докажем, что если взять λ достаточно малым (а N окажется, соответственно, достаточно большим), то требуемое условие будет выполнено.
Для этого обозначим набор из первых N чисел нашей последовательности через S, посмотрим, сколько чисел из S попало в отрезок I, и обозначим это количество через k. Получившуюся частоту попаданий $\frac{k}{N}$ легко оценить в терминах λ сверху и снизу: так как $\frac{1}{N} < \lambda < \frac{1}{N-1}$, то $(k-1)\lambda < \frac{k-1}{N-1} \leqslant \frac{k}{N} < k\lambda$.
С другой стороны, длину отрезка $|I|$ также легко оценить сверху и снизу в терминах λ: так как все маленькие интервалы, на которые набор S разделяет отрезок $[0, 1]$, не длиннее λ, и $k + 1$ из них покрывают I, то I не длиннее $(k + 1)\lambda$. При этом только три из маленьких интервалов могут быть короче λ: два крайних, а также интервал после точки $\{a + N\lambda\}$. Отсюда следует, что I целиком содержит хотя бы $k - 2$ интервала длины λ, а значит не короче $(k - 2)\lambda$. Итого, $(k - 2)\lambda < |I| < (k + 1)\lambda$.
Сравнивая полученные оценки на частоту $\frac{k}{N}$ и на длину отрезка $|I|$, получим, что они отличаются не более чем на 2λ.
Таким образом, если взять $\lambda < \varepsilon/2$, а N на 1 больше целой части $1/\lambda$, то требуемое условие выполнено.

Для дальнейших пунктов задачи 7 нам понадобится следующая лемма, проверяемая прямым вычислением.

Лемма 1. Пусть частота попаданий набора чисел $a_1, \ldots, a_k$ в отрезок I равна A, набора чисел $b_1, \ldots, b_m$ – равна B, а объединения этих наборов $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$ – равнf C. Тогда C равна *взвешенному среднему* $\dfrac{kA + mB}{k + m}$.

Следствие 1. Пусть в условиях Леммы 1 частота A отличается от длины $|I|$ менее чем на ε, а частота B – менее чем на δ, тогда частота C отличается менее чем на взвешенное среднее этих ошибок $\dfrac{k\varepsilon + m\delta}{k + m}$.

Замечание 1. Если мы знаем, что первая ошибка ε очень мала (например, 0.001), а вес второй ошибки m намного меньше веса первой k (например, в 1000 раз), то усредненная ошибка $\frac{k\varepsilon+m\delta}{k+m}$ тоже очень мала, даже если вторая ошибка δ сама по себе не такая уж и маленькая (например, при $\delta < 1$ усредненная ошибка гарантированно меньше 0.002).

Задача 7в

В пункте **а** мы обнаружили, что если взять N и λ такими, что $\frac{1}{N} < \lambda < \frac{1}{N-1}$, то частота попаданий набора $\{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}$, $\{a + 3\lambda\}, \ldots, \{a + N\lambda\}$ в отрезок I будет отличаться от длины $|I|$ менее чем на 2λ.
Посмотрим, для каких еще M, кроме $M = N$, частота попадания набора $\{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}$, $\{a + 3\lambda\}, \ldots, \{a + M\lambda\}$ в I будет удовлетворять этому свойству. Для этого разобьем указанный набор на несколько поднаборов длины N и "набор-остаток" длины $r < N$.

$$\{a + \lambda\},\ \{a + 2\lambda\},\ \{a + 3\lambda\}, \ldots, \{a + N\lambda\}$$

$$\{a + (N + 1)\lambda\},\ \{a + (N + 2)\lambda\},\ \{a + (N + 3)\lambda\}, \ldots, \{a + 2N\lambda\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\{a + (pN + 1)\lambda\},\ \{a + 2\lambda\},\ \{a + 3\lambda\}, \dots, \{a + (pN + r)\lambda\}$$

Фактически, мы поделили M на N нацело с остатком: $M = pN + r$.
По пункту **a** частота попаданий каждого из первых p наборов в отрезок I отличается от его длины меньше чем на 2λ. Частота попаданий последнего "набора-остатка" непредсказуема, но уж точно между 0 и 1, так что отличается от $|I|$ меньше чем на 1. Поэтому, согласно Следствию 1, отклонение от $|I|$ для частоты попаданий всего набора $\{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}$, $\{a + 3\lambda\}, \dots, \{a + M\lambda\}$ будет меньше взвешенного среднего отклонений, а значит меньше $\dfrac{Np \cdot 2\lambda + r\delta}{Np + r}$, которое, в свою очередь, меньше чем $2\lambda + \frac{1}{\lambda M}$. При достаточно большом M (большем $1/\lambda^2$) это число меньше 3λ.
Итак, при всех достаточно больших M (больше $1/\lambda^2$), отклонение от $|I|$ для частоты попаданий всего набора $\{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}$, $\{a + 3\lambda\}, \dots, \{a + M\lambda\}$ будет меньше 3λ.
В частности, если взять $\lambda < \varepsilon/3$, то для любого $M > 1/\lambda^2$ частота попаданий указанного набора будет отличаться от длины отрезка менее чем на ε.

Задача 7c

Применив теорему Дирихле к отрезку $[0, \delta]$ и последовательности $\{n\lambda\}$, найдем такое q, что $\{q\lambda\} < \delta$. Обозначив $\{q\lambda\}$ через μ, заметим, что прогрессия Вейля $\{a\}, \{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}, \dots$ распадется в чередующиеся прогрессии Вейля с разностью μ и началами в точках a, $a + \lambda$, $a + 2\lambda, \dots, a + (q-1)\lambda$. Действительно, поделив n с остатком на q, получим $n = mq + r$, так что $\{a + n\lambda\} = \{(a + r\lambda) + m\mu\}$.

Задача 7d

Возьмем произвольное число $\delta > 0$, и применим для него пункт **c**. Наша прогрессия Вейля $\{a\}, \{a + \lambda\}$, $\{a + 2\lambda\}, \dots$ окажется разбита на q прогрессий с разностью $\mu < \delta$. Обозначим эти прогрессии через $P_1, P_2, \dots, P_q$, а исходную – через P.
Согласно пункту **b**, если выбрать из прогрессии P_i более чем $1/\mu^2$ начальных элементов, то частота их попаданий в отрезок I отличается от длины $|I|$ менее чем на 3μ.
Тогда, согласно Следствию 1, если выбрать более чем $q/\mu^2 + q$ начальных элементов из прогрессии P, то частота их попаданий в отрезок I тоже отличается от длины $|I|$ менее чем на 3μ, поскольку этот набор из $> q/\mu^2 + q$ начальных элементов прогрессии P распадаются на наборы из $> 1/\mu^2$ начальных элементов прогрессий $P_1, \dots, P_q$.
Осталось выбрать такое δ, чтобы получившаяся ошибка 3μ была заведомо не больше наперед заданной ошибки ε. Для этого достаточно взять $\delta = \varepsilon/3$. Тогда для $q/\mu^2 + q$ или большего числа начальных элементов прогрессии P частота попаданий в отрезок I отличается от длины $|I|$ менее чем на $3\mu < 3\delta < \varepsilon$.

Задача 8

Пусть A и B – фигуры на плоскости. Напомним, что через $A \cup B$ и $A \cap B$ обозначаются объединение и пересечение A и B, соответственно.

Задача 8a

Рассмотрим иррациональную прямую ℓ, определенную уравнением $ax + by = c$. Для каждого $T > 0$, через S_T обозначим отрезок длины T на ℓ с концом в точке $(0, \frac{c}{b})$. Пусть $I \subset [0,1]^2$ – отрезок, не параллельный ℓ.

Определение. *Частотой пересечений* отрезка I с обмоткой $[0,1]^2$, соответствующей прямой ℓ, называется предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\#(\{S_T\} \cap I)}{T}.$$

Задача 8вс

Сперва предположим, что отрезок I содержится в отрезке $[0,1]$ оси Oy. Тогда точки пересечения обмотки и отрезка $[0,1]$ оси Oy порождают прогрессию Вейля $u_n = \left\{\frac{c}{b} + n\left(-\frac{a}{b}\right)\right\}$. По определению, величина, которую мы хотим вычислить – частота элементов прогрессии, содержащихся в I.

Предупреждение! Прежде чем применять теорему Вейля (см. задачу 7), следует заметить, что, двигаясь с единичной скоростью по прямой $ax + by = c$, мы пересекаем вертикальную прямую клетчатой бумаги каждые $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ минут (это число – просто длина отрезка прямой, заключенного между двумя соседними вертикальными прямыми клетчатой бумаги). Таким образом, нам потребуется $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|}$ минут, чтобы добраться до каждого нового члена последовательности (u_n).

Поэтому теорема Вейля и последнее наблюдение вместе показывают, что искомая частота пересечений отрезка I равна $\dfrac{|I||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Аналогичное рассуждение для случая, когда отрезок I содержится в отрезке $[0,1]$ оси Ox, дает ответ $\dfrac{|I||a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Теперь пусть I – произвольный отрезок в $[0,1]^2$. Если $ab < 0$, то спроецируем I вдоль ℓ на нижний левый угол квадрата. Иначе спроецируем I на верхний левый угол. Эта проекция, вообще говоря, будет объединением вертикального отрезка I_V и горизонтального отрезка I_H, содержащихся в соответствующих сторонах квадрата. Легко проверить следующее утверждение:

Пусть τ – такая плитка, что $\{\tau\} \not\ni (0,0)$. Тогда дробная часть плитки $\{\tau\}$ пересекает I если и только если она пересекает ровно один из отрезков I_V и I_H.

Заметим, что для каждого значения T, отрезок длины T на прямой $ax+by=c$ содержит не больше одной плитки такой что $\{\tau\} \ni (0,0)$. Таким образом, для каждого $T > 0$ получаем:

$$0 \leqslant \#(\{S_T\} \cap I_V) + \#(\{S_T\} \cap I_H) - \#(\{S_T\} \cap (I_V \cup I_H)) \leqslant 1.$$

Рассмотрим максимальное $T_0 < T$ такое что правый конец отрезка S_{T_0} лежит на линии клетчатой бумаги. Очевидно, что

$$0 \leqslant \#(\{S_{T_0}\} \cap (I_V \cup I_H)) - \#(\{S_T\} \cap I) \leqslant 1.$$

Таким образом, если T стремится к бесконечности, то

$$\frac{\#(\{S_T\} \cap I) - \#(\{S_{T_0}\} \cap I_V) - \#(\{S_{T_0}\} \cap I_H)}{T} \to 0.$$

Поэтому ответ в задаче 8c равен $\dfrac{|I_H||a| + |I_V||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Прямое вычисление показывает, что для произвольного вертикального/горизонтального отрезка $I \subset [0,1]^2$, частота пересечений такая же, как для его копии, содержащейся в соответствующей стороне квадрата, что дает ответ в задаче 8b. А именно, $\dfrac{|I||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для вертикального отрезка I и $\dfrac{|I||a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ для горизонтального I.

Задача 9а

Эта задача – частный случай задачи 8c. Действительно, возьмем в качестве I диагональ квадрата $[0,1]^2$, пересекающую дробные части всех плиток прямой $ax + by = 0$. Тогда для каждой плитки τ, содежращейся в отрезке длины T, ее дробная часть $\{\tau\}$ пересекает I. Поэтому, так как для каждого $T > 0$ разница между числом точек в $\{S(T)\} \cap I$ и числом плиток в $S(T)$ не превышает 1, искомый предел совпадает с частотой пересечений обмотки с отрезком I, и мы можем вычислить его с помощью задачи 8c. Поэтому искомая плотность равна $\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, так как в это случае $|I_V| = |I_H| = 1$.

Задача 9в

Заметим, что числитель в формуле для плотности совпадает со знаменателем в формуле для средней длины. При этом разница между числителем в последней и T не превышает $\sqrt{2}$ – максимально возможной длины плитки. Очевидно, если T стремится к бесконечности, то и количество $N(T)$ плиток в отрезке прямой длины T тоже стремится к бесконечности, поэтому $\lim_{T\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{N(T)} = 0$. Таким образом, искомый предел – обратное число к пределу из задачи 9a, то есть ответ равен $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|+|b|}$.

Задача 9c

Эта задача – также частный случай задачи 8c, если в качестве I взять диагональ, отличную от выбранной в решении задачи 9a. Действительно, эта диагональ также является диагональю параллелограмма $P \subset [0,1]^2$, содержащего дробные части всех плиток максимальной длины. Это замечание показывает, что для плитки τ, ее дорбная часть $\{\tau\}$ пересекает I если и только если τ имеет максимальную длину. Таким образом, для получения ответа осталось применить задачу 8c: если $\left|\dfrac{b}{a}\right| > 1$, то проекция отрезка I вдоль прямой $ax+by=0$ будет вертикальным отрезком длины $\dfrac{|b|-|a|}{|b|}$. Поэтому, согласно задаче 8c, искомая частота равна $\dfrac{|b|-|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Случай $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$ можно рассмотреть аналогичным образом: проекция I вдоль прямой будет горизонтальным отрезком длины $\dfrac{|a|-|b|}{|a|}$, поэтому, согласно задаче 8c, искомая частота равна $\dfrac{|a|-|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Итого, ответ равен $\dfrac{\big||b|-|a|\big|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача 10a

Плоскость α в трехмерном пространстве делится на (*плитки*) плоскостями стандартной трехмерной решетки (т.е. плоскостями, параллельными координатным, и отстоящими от них на целое расстояние). Это дает *мозаику* на плоскости α.

Задача 10в

Так как куб содержит только 6 граней, плитка может иметь не больше 6 сторон и углов. Например, чтобы получить шестиугольную плитку, можно пересечь куб $[0,1]^3$ плоскостью $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Задача 10c

Решение аналогично задаче 2a и дает следующий ответ. Предположим, что $|A| \leqslant |B| \leqslant |C|$. Если $|A|+|B| \geqslant |C|$, то искомое количество равно $\left[\dfrac{|A|+|B|+|C|}{2}\right]$. Иначе ответ равен $|A|+|B|$.

Задача 10d

Очевидно, начало координат O содержится в каждой плоскости α, определенной уравнением вида $Ax+By+Cz=0$. Если α не содержит других целых точек, то имеет место первое

утверждение.
Иначе возьмем $P = (p_1, p_2, p_3) \in \alpha$ – произвольную целую точку, такую что $P \neq O$, и рассмотрим прямую ℓ, порожденную вектором $\overrightarrow{OP}$. Каждая точка прямой ℓ имеет вид $\lambda P = (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем:

$$A\lambda p_1 + B\lambda p_2 + C\lambda p_3 = \lambda(Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) = 0.$$

Поэтому прямая ℓ содержится в α.
Положим $d = \text{НОД}(p_1, p_2, p_3)$ и рассмотрим целую точку $P_0 = \frac{1}{d}P$. Мы докажем, что каждая целая точка $Q \in \ell$ имеет вид $Q = kP_0$ для какого-то $k \in Z$.
Возьмем произвольную целую точку $Q \in \ell$. Она имеет вид $Q = \lambda P_0$ для $\lambda \in \mathbb{Q}$. Представим λ как неприводимую дробь $\lambda = \frac{k}{m}$ и предположим, что $m \neq 1$. С другой стороны, легко видеть, что координаты вектора P_0 все делятся на m, в то время как, по определению P_0, их НОД равен 1. Поэтому $m = 1$. Так что, если плоскость α не содержит других целых точек, то имеет место второе утверждение.
В противном случае, пусть $N = (n_1, n_2, n_3) \in \alpha$ целая точка вне ℓ. Подставляя координаты N и Pв уравнение $Ax+By+Cz = 0$, получим систему двух непропорциональных линейных уравнений на переменные A, B, C с целыми коэффициентами. Пусть $p_1 = \lambda n_1$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, тогда рассмотрим ненулевую точку $P - \lambda N = (0, p_2 - \lambda n_2, p_3 - \lambda n_3) \in \alpha$. Подставляя ее в уравнение $Ax + By + Cz = 0$, получим, что $B = \mu C$ для некоторого рационального μ. Поэтому, из уравнения $Ap_1 + \mu C p_2 + C p_3 = 0$, получаем, что $A = \nu C$ для некоторого $\nu \in \mathbb{Q}$. Итак, система имеет рациональное решение, то есть имеет место третье утверждение.