Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства
2. Основные задачи
А.Якубов, А.Зайков, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

14. Прямые A_0B_0, C_0I и CC'' пересекаются в одной точке.

Пусть P — произвольная точка, не лежащая на сторонах треугольника ABC. Тогда прямые, симметричные AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C соответственно, пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удаленной). Эта точка называется *изогонально сопряженной* P относительно треугольника ABC.

Введём дальнейшие обозначения. Пусть I_1, I_{A_1}, I_{B_1}, I_{C_1}, H_1 - точки, изотомически сопряжённые I, I_A, I_B, I_C, H соответственно относительно треугольника ABC; точки G_2, N_2 изогонально сопряжены G и N относительно треугольника ABC. Аналогично определим G_{A_2}, N_{A_2}, G_{B_2}, N_{B_2}, G_{C_2}, N_{C_2}.
L'- точка Лемуана $\triangle A'B'C'$.

15. N_2 и G_2 — центры внешней и внутренней гомотетий вписанной и описанной окружности ABC соответственно.

16. H_1, I_1, N, G лежат на одной прямой, причём они образуют гармоническую четвёрку.

16'. Таким же свойством обладают четвёрки точек H_1, I_{A_1}, N_A, G_A и т. д.

17. Прямые $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC конкурентны.

17'. Прямые $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC конкурентны.

18. Прямые $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC, GG_A конкурентны.

18'. Прямые $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC, G_BG_C. конкурентны.

19. NG, N_AG_A, N_BG_B, N_CG_C пересекаются в L'.
Следствие: Треугольники $N_AN_BN_C$ и $G_AG_BG_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является точка Лемуана антисерединного треугольника.

20. Прямые IL и NG параллельны.
20'. Параллельны пары прямых N_AG_A и I_AL, N_BG_B и I_BL, N_CG_C и I_CL.

Пусть даны два перспективных треугольника XYZ и $X_1Y_1Z_1$. По *теореме Дезарга*, $XY \cap X_1Y_1$, $XZ \cap X_1Z_1$, $ZY \cap Z_1Y_1$ коллинеарны. Полученную прямую назовём *осью перспективы двух указанных треугольников*.

21. Оси перспективы треугольников $N_AN_BN_C$ и ABC, а также $G_AG_BG_C$ и ABC совпадают. Данная прямая перпендикулярна IG.

(*Теорема Сонда*). Если треугольники XYZ и $X_1Y_1Z_1$ одновременно и перспективны и ортогологичны, то два центра ортологичности и центр перспективы этих треугольников лежат на одной прямой, перпендикулярной оси перспективы $\triangle XYZ$ и $\triangle X_1Y_1Z_1$

22. I — центр ортологичности треугольников $N_AN_BN_C$ и ABC.

23. Решите задачу 20, используя задачи 21 и 22(возможно и какие-то другие задачи из предыдущих).

3. Дополнительные задачи

Пусть U - некая точка на плоскости, не лежащая на прямых XY, YZ, ZX. Тогда ось перпективы треугольника XYZ и чевианного треугольника точки U назовём *трилинейной полярой* U относительно $\triangle XYZ$.

24. Трилинейная поляра точки G перпендикулярна прямой IG.

25. Пусть U - точка на описанной около $\triangle XYZ$ окружности, отличная от X,Y,Z. L_0 - точка Лемуана $\triangle XYZ$. Тогда трилинейная поляра точки U относительно $\triangle XYZ$ проходит через L_0.

26. Пусть дан треугольник XYZ и точка Q, не лежащая на прямых, содержащих стороны треугольника. $XQ \cap YZ = X_1$;$YQ \cap XZ = Y_1$; $ZQ \cap YX = Z_1$; $Y_1Z_1 \cap YZ = X_2$. Тогда четвёрка точек Y,Z,X_1,X_2 гармоническая.

27. Пусть U и V - точки плоскости, не лежащие на прямых XY, XZ, YZ. U' и V' изогонально (изотомически) сопряжены им относительно $\triangle XYZ$. V лежит на трилинейной поляре U'. Тогда U лежит на трилинейной поляре V'.

28. Оси перспективы треугольников $N_AN_BN_C$ и ABC, а также $G_AG_BG_C$

и ABC совпадают с трилинейной полярой I_1 относительно треугольника ABC.

29. Трилинейная полярой I_1 относительно треугольника ABC параллельна трилинейной поляре G относительно треугольника ABC.

30. Решите задачу 20, используя задачи 24-28(возможно и какие-то другие задачи из предыдущих), но НЕ используя теорему Сонда.

31. Если точка P лежит на трилинейной поляре G, то трилинейная поляра P касается вписанной окружности.

Теорема Фейербаха. Окружность девяти точек треугольника ABC касается его вписанной и внеспианных окружностей. Точки касания F, F_A, F_B, F_C называются *точками Фейербаха.*

31'. Если P — бесконечно удаленная точка трилинейной поляры G, то ее трилинейная поляра касается вписанной окружности в точке F.

32. Точки, симметричные F относительно сторон треугольника $A_0B_0C_0$, лежат на прямой OI.

33. Точки A_A, B_B, C_C и F лежат на одной окружности.

34. Сформулируйте аналоги задач 31', 32, 33 для точек F_A, F_B, F_C.