Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

А.Якубов, А.Зайков, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

2. Основные задачи. Решения.

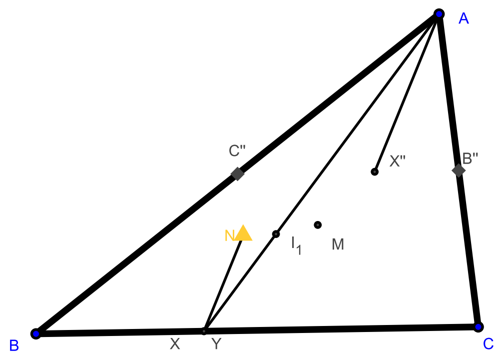
14. Рассмотрим полярное преобразование относительно вписанной окружности. Прямая A_0B_0 перейдет в точку C. Прямая C_0I перейдет в точку на бесконечно удаленной прямой соответствующую направлению AB. Следовательно точка $S = A_0B_0 \cap C_0I$ перейдет в прямую n проходящую через C и параллельную AB. Тогда, по определению полярного преобразования четверка прямых CA_0, CB_0, CS и n образуют гармоническую четверку. При проекции из точки C на прямую AB мы получим точки A, B, бесконечно удаленную и середину стороны (т.к. отношение -1), а значит, C, S и C'' на одной прямой.

15. Сделаем композицию инверсии относительно окружности с центром в A радиуса $\sqrt{AB \cdot AC}$ и симметрии относительно внутренней биссектрисы угла BAC. Заметим, что точки B и C поменялиясь местами. Значит, прямая BC перешла в окружность, описанную около треугольника ABC. Вписанная окружность перешла в окружность, касающуюся лучей AB и AC, а также окружности ABC внешним образом в точке X, где X — образ точки A_0 в результате данных преобразований. Следовательно, G_2 лежит на прямой AX. Так как A — внешний центр гомотетии, перводящей вписанную окружность в её образ в результате наших преобразований, а X — центр внутренней гомотетии, переводящей образ вписанной окружности в описанную, то, по теореме о трёх гомотетиях, центр внутренней гомотетии, переводящей вписанную в $\triangle ABC$ окружность в его описанную, лежит на прямой AX, то есть на прямой AG_2. Аналогично он лежит на прямых BG_2 и CG_2. Таким образом, он совпадает с G_2. То, что N_2 — центр внутренней гомотетии, доказывается аналогично.

16. Как известно, изогональное и изотомическое сопряжение переводят прямые в коники, содержащие вершины треугольника, и наоборот (коники, содеражщие вершины, — в прямые). Значит, композиция изогонального и изотомического сопряжений переводит прямые в прямые, т.е. является проективным преобразованием. Это преобразование переводит точку N_2 в G, G_2 — в N, I — в I_1, O — в H_1. Согласно задаче 15, O, I, G_2, N_2 —

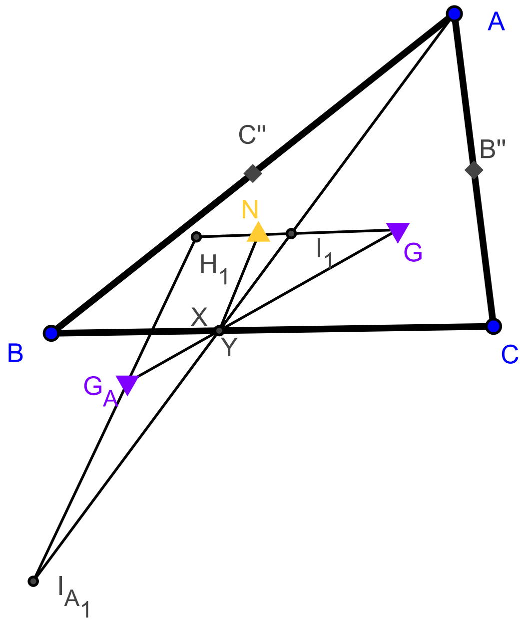
гармоническая четвёрка точек, лежащих на одной прямой. Следовательно, четвёрка H_1, I_1, N, G обладает этим же свойством. Для остальных указанных в утверждении четвёрок доказательство производится аналогично.

17. Пусть X — точка пересечения NN_A и BC, Y — точка пересечения $I_{A_1}I_1$ и BC. Так как I_1 и I_{A_1} изотомически сопряжены I и I_A соответственно, то $\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{AC}{AB}$. Сделаем гомотетию с центром в M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. По задаче 7, прямая NN_A перейдёт в прямую II_A, то есть внутреннюю биссектрису угла A. Точки B и C перейдут в B'' и C''' соответственно, X — в X''. По свойству биссектрисы, $\frac{\overline{B''X''}}{\overline{X''C''}} = \frac{B''A}{C''A} = \frac{CA}{BA} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}$. При этом, $\frac{\overline{B''X''}}{\overline{X''C''}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$. Значит, X и Y совпадают. Таким образом, $I_{A_1}I_1$, NN_A, BC конкурентны.



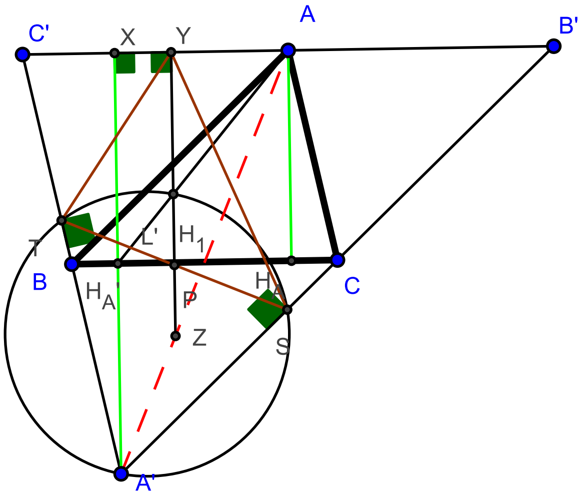
Конкурентность $I_{B_1}I_{C_1}$, N_BN_C, BC доказывается аналогично.

18. Точки I_1, H_1, N, G лежат на одной прямой; I_{A_1}, H_1, N_A, G_A лежат на одной прямой. При этом двойное отношение четвёрки I_1, H_1, N, G равно -1, и двойное отношение четвёрки I_{A_1}, H_1, N_A, G_A равно -1. Следовательно, прямые $I_{A_1}I_1$, NN_A, GG_A конкурентны. Применяя задачу 17, получаем требуемое.

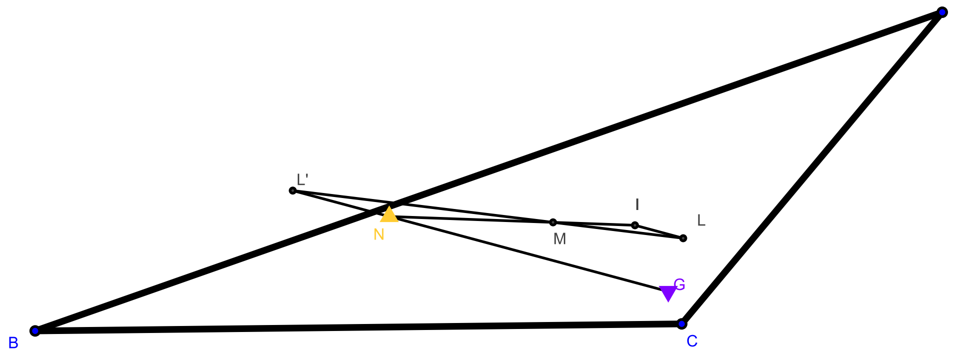


19. Согласно задаче 16, все указанные прямые проходят через H_1. Значит, необходимо и достаточно доказать, что H_1 и L' совпадают. Для этого покажем, что AH_1 проходит через L'. Пусть X и Y — проекции A' и L' на прямую $B'C'$ соответственно, Z симметрично Y относительно L'. Прямая AH_1 проходит через точку, симметричную H_A относительно A''. Заметим, что при симметрии относительно A'' высота из A на BC переходит в прямую $A'X$. Прямая BC делит отрезок $A'X$ пополам. Следовательно, AH_1 проходит через середину $A'X$. Четырехугольник $ZYXA'$ — трапеция, а точка L' — середина основания YZ. Поэтому AH' проходит через середину основания $A'X$. Чтобы показать, что AH' проходит через L' покажем, что A — точка пересечения боковых сторон трапеции, то есть, что A, Z, A' лежат на одной прямой. Пусть S и T — проекции L' на прямые $A'B'$ и $A'C'$ соответственно. Треугольник STY — педальный треугольник точки L' относительно треугольника $A'B'C'$. Так как L' — точка Лемуана $\triangle A'B'C'$, она является точкой пересечения медиан в своём педальном треугольнике. Пусть P — точка пересечения ST и YL'. Тогда YP — медиана треугольника YST. Следовательно, $\frac{\overline{YL'}}{\overline{L'P}} = 2$, $\overline{YL'} = \overline{L'Z}$. Отсюда P — середина $L'Z$. Отрезки ST и $L'Z$, пересекаясь, делятся пополам. Значит, $SL'TZ$ — параллелограмм. Так как $SL' \perp SA'$ и $TL' \perp TA'$, то $SZ \perp A'T$ и $TZ \perp A'S$, т.е. Z — ортоцентр треугольника $SA'T$, а

L' — точка его описанной окружности, диаметрально противоположная A'. Отсюда прямые $A'L'$ и $A'Z$ симметричны относительно внутренней биссектрисы угла $B'A'C'$, т.е. $A'L'$ — симедиана в $\triangle A'B'C'$, следовательно, $A'Z$ — его медиана. Поскольку A — середина $B'C'$, точки A', Z, A лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.



20. При гомотетии с центром в M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ точки N и L' перейдут в I и L соответственно. Итак, прямые IL и NL' паралеллельны. Осталось заметить, что, по задаче 19, точки L', N, G лежат на одной прямой.



Аналогично параллельны пары прямых N_AG_A и I_AL, N_BG_B и I_BL, N_CG_C

и $I_C L$.

21. Оси перспективы треугольников $N_A N_B N_C$ и ABC, а также $G_A G_B G_C$ и ABC совпадают, согласно задаче 18, с прямой через $AB \cap I_{A_1} I_{B_1}$, $AC \cap I_{A_1} I_{C_1}$, $BC \cap I_{B_1} I_{C_1}$.
Перпендикулярность доказывается либо через теорему Сонда (задача 23) либо с помозью трилинейной поляры (задачи 25-29).

22. Треугольник $N_A N_B N_C$ гомотетичен треугольнику $I_A I_B I_C$ с центром в M. Значит, $N_A N_B \parallel I_A I_B$, т.е. $N_A N_B \perp CI$. Аналогично, $N_A N_C \perp BI$; $N_B N_C \perp AI$. Значит I — центр ортологичности треугольников $N_A N_B N_C$ и ABC.

23. Треугольники $N_A N_B N_C$ и ABC перспективны с центром в точке G. Достаточно показать, что I является одним из центров ортогональности этих треугольников, что следует из задачи 22.

3. Дополнительные задачи. Указания.

24. Трилинейная поляра точки G совпадает с ее полярой относительно вписанной окружности.

25. Достаточно доказать утверждение задачи для правильного треугольника.

26. Следует из теорем Чевы и Менелая.

27. Проективным преобразованием сводится к задаче 25.

31. Достаточно доказать утверждение задачи для правильного треугольника.

31', 32. Оба утверждения равносильны следующему: касательная к вписанной окружности в точке Фейербаха касается также вписанного *эллипса Штейнера*, касающегося сторон треугольника в их серединах (см. [1]).

33. Из задачи 16 следует, что точка Нагеля лежит на *гиперболе Фейербаха* (см. [2]).

Список литературы

[1] http://www.http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp23-31.pdf

[2] А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.