Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

1. Вводные задачи

А.Якубов, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

0. *Теорема Чевы.* Докажите, что[1] три чевианы AA', BB', CC' треугольника $\triangle ABC$ проходят через одну точку или параллельны, тогда и только тогда, когда $BA' \cdot CB' \cdot AC' = -CA' \cdot AB' \cdot BC'$ (отрезки рассматриваются как направленные).

Рассмотрим треугольник ABC. Его вписанная окружность касается соответствующих сторон треугольника в точках A_0, B_0, C_0.

1. Прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке G.

Точка из предыдущей задачи называется *точкой Жергонна* данного треугольника. Рассмотрим вневписанную окружность треугольника, касающуюся стороны BC. Она касается прямой AB в точке C_A, AC в точке B_A, BC в точке A_A.

2. Прямые AA_A,BB_A и CC_A пересекаются в одной точке G_A.

Точку из предыдущей задачи назовем *внешней точкой Жергонна* данного треугольника, соответствующей вершине A. Аналогично определим точки A_B, B_B, C_B, G_B, A_C, B_C, C_C, G_C.

Введем некоторые стандартные обозначения. Пусть I — центр вписанной в треугольник окружности. I_A, I_B, I_C — центры его вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно. Be, Be_A, Be_B, Be_C - центры окружностей, описанных около треугольников $I_AI_BI_C$, II_BI_C, I_AII_C, I_AI_BI соответственно (точку Be принято назвать *точкой Бэвена*, остальные точки, как и в случае с точками Жергонна, мы назовем *внешними точками Бэвена*). O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — точка пересечения его высот, M - медиан. A', B', C' — точки, симметричные соответствующим вершинам треугольника относительно середин противоположных сторон. H' — ортоцентр треугольника $A'B'C'$.

3. Точки O, M, H лежат на одной прямой, причем $\frac{\overline{OM}}{\overline{MH}} = \frac{1}{2}$.

[1] В дальнейшем в формулировках задач слова "Докажите, что" будут опускаться

Прямая из предыдущей задачи называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

3'. $\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'O}} = \frac{4}{3}$.

Середины соответствующих сторон треугольника ABC назовём A'',B'',C''.

4. Пусть точки X_A, X_B, X_C, лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC соответственно, таковы, что прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в точке X. Пусть Y_A, Y_B, Y_C — точки симметричные X_A, X_B, X_C относительно A'', B'', C'' соответственно. Тогда прямые AY_A, BY_B, CY_C пересекаются в одной точке Y.

Точки X и Y из предыдущей задачи называются *изотомически сопряженными* относительно данного треугольника.

5. Прямые AA_A, BB_B, CC_C пересекаются в одной точке N, причем эта точка изотомически сопряжена точке Жергонна данного треугольника.

Точку из предыдущей задачи назовем *точкой Нагеля.*

6. Прямые AA_0, BB_C, CC_B пересекаются в одной точке N_A, причем эта точка изотомически сопряжена внешней точке Жергонна данного треугольника, соответствующей вершине A.

Точку из предыдущей задачи назовем *внешней точкой Нагеля*, соответствующей вершине A. Аналогично определяются точки N_B и N_C.

Каждому направлению на плоскости сопоставим бесконечно удаленную точку, соответствующую данному направлению, и будем считать, что она лежит на всех прямых, у которых такое направление. Три точки назовем *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой. Прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 назовем *конкурентными*, если они пересекаются в одной точке или параллельны. Треугольник $X_1Y_1Z_1$ и треугольник $X_2Y_2Z_2$ назовем *перспективными*, если прямые X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 конкурентны. Если прямые пересекаются в некоторой точки плоскости, то точку пересечения этих прямых назовем *центром перспективы* двух данных перспективных треугольников. Если же прямые параллельны, то центром перспективы назовем бесконечно удаленную точку, которая соответствует направлению данных прямых.

7. Точка M делит каждый из отрезков IN, I_AN_A, I_BN_B, I_CN_C в отношении

1:2.
Следствие. Треугольники $I_AI_BI_C$ и $N_AN_BN_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является центр масс данного треугольника.

8. Точка O является серединой отрезков BeI, Be_AI_A, Be_BI_B, Be_CI_C.
Следствие: Треугольники $I_AI_BI_C$ и $Be_ABe_BBe_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является центр описанной окружности данного треугольника.

9. Be, Be_A, Be_B, Be_C - середины отрезков $H'N$,$H'N_A$,$H'N_B$,$H'N_C$ соответственно.

Следствие: Треугольники $Be_ABe_BBe_C$ и $N_AN_BN_C$ гомотетичны в H' с коэфициентом 2. А значит они и перспективны с центром перспективы H'.

10. Прямые C_CG_A, A_AG_C, BG конкурентны.

11. Прямые A_BC_0, G_BG, BI, C_BA_0 конкурентны.

11'. Прямые A_AC_C, G_AG_C, I_AI_C, A_CC_A конкурентны(все аналогичные прямые, разумеется, тоже конкурентны).

12. $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be, N коллинеарны.

12'. $I_AG_A \cap I_CG_C$, Be_B, N_B коллинеарны.

13. I_AG_A, I_BG_B, I_CG_C и IG пересекаются в H'.
Следствие: Треугольники $I_AI_BI_C$ и $G_AG_BG_C$ перспективны, при этом центром их перспективы является H'(ортоцентр антисерединного треугольника, антисерединным треугольником треугольника ABC называется треугольник $A'B'C'$).