Точки Нагеля, Жергонна и Фейербаха и их свойства

1. Вводные задачи

А.Якубов, А.Зайков, М.Дидин, А.Заславский, О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков

1. Следует из теоремы Чевы.

2. Следует из теоремы Чевы.

3. Используем гомотетию с центров в точке M с коэффициентом -2.

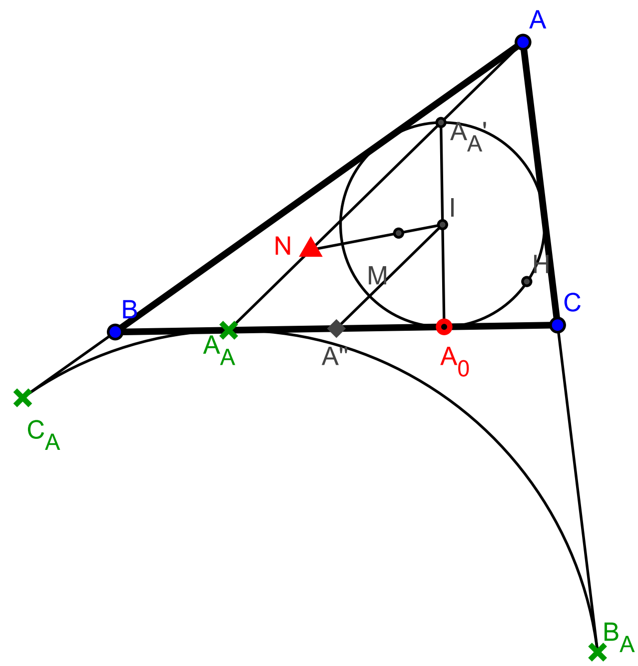
3'. Следуюет из задачи 3 с применением гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2.

4. Следует из теоремы Чевы.

5. Следует из теоремы Чевы.

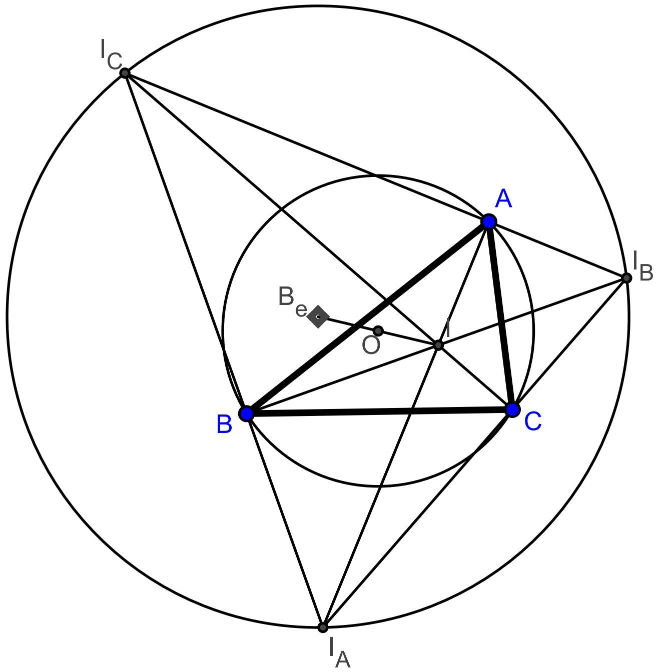
6. Следует из теоремы Чевы.

7. Как известно, $BA_0 = CA_A$. A''-середина A_0A_A. По определению изотомического сопряжения, N лежит на прямой AA_A. Сделаем гомотетию с центром в A, переводящую вневписанную окружность, касающуюся стороны BC, во вписанную. A_A перейдёт в точку A'_A. Касательная к вписанной окружности в точке A'_A параллельна касательной к вневписанной в точке A_A, то есть прямой BC. При этом очевидно, что A'_A отлична от A_0. Значит, A_0 и A'_A диаметрально противоположны. Отсюда I-середина $A_0A'_A$. $A''I$-средняя линия $\triangle A'_AA_0A_A$. Значит, $AA_A \| A''I$. Аналогично, $BB_B \| B''I$; $CC_C \| C''I$. Следовательно, при гомотетии с центром в M и коэффициентом -2, переводящей $\triangle A''B''C''$ в $\triangle ABC$ точка I перейдёт в N. Таким образом, точка M делит IN в отношении 1:2.

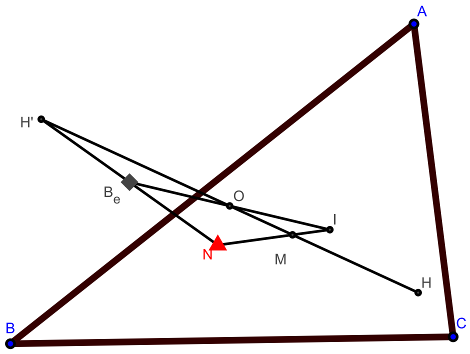


Для отрезков $I_A N_A$,$I_B N_B$,$I_C N_C$ утверждение доказывается аналогично.

8. Известно, что внутренняя биссектриса любого угла перпендикулярна его внешней биссектрисе. Отсюда следует, что точка I - ортоцентр треугольника $I_AI_BI_C$, а I_A,I_B,I_C-ортоцентры $\triangle II_BI_C$, $\triangle I_AII_C$, $\triangle I_AI_BI$ соответственно. Основаниями высот во всех четырёх указанных треугольниках являются точки A,B,C. Следовательно, O-центр окружности девяти точек для данных треугольников. Центр окружности 9 точек любого треугольника является серединой отрезка, соединяющего центр его описанной окружности с его ортоцентром. Отсюда непосредственно следует наше утверждение.



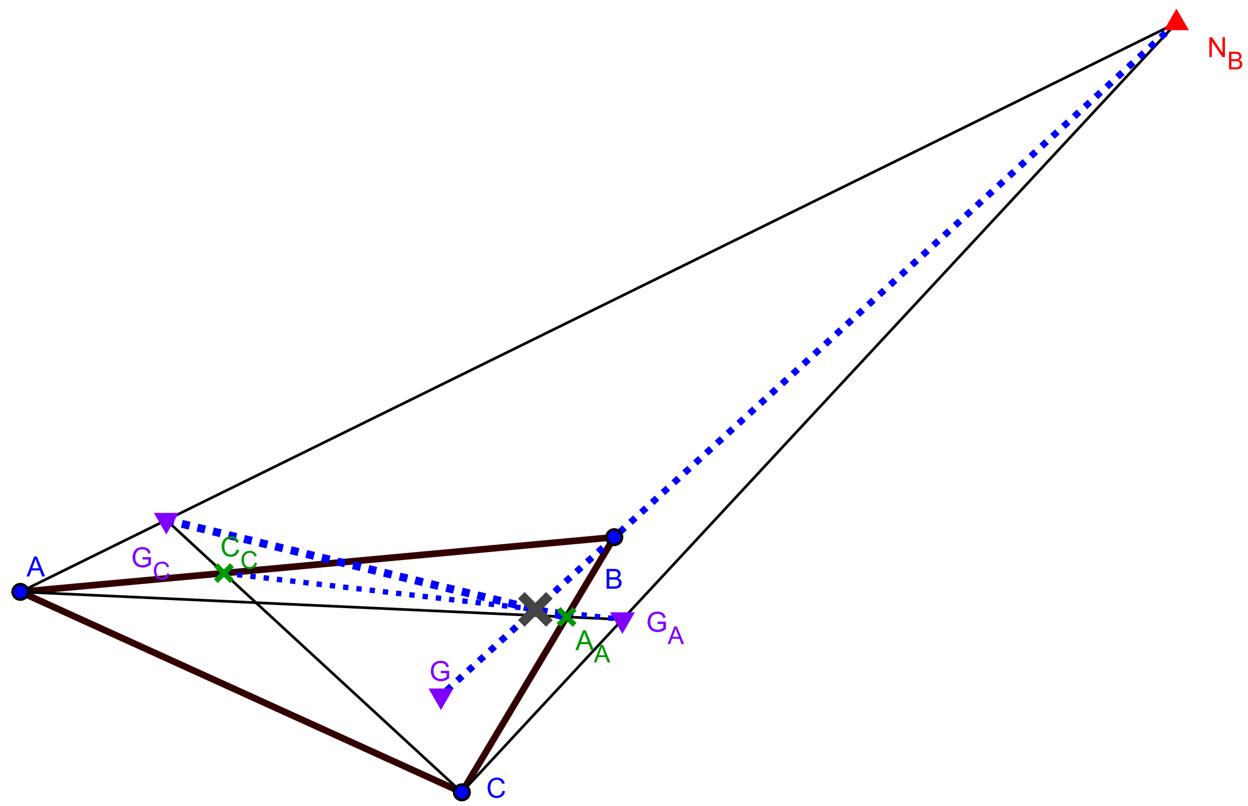
9. По доказанным выше утверждениям, $\frac{\overline{H'M}}{\overline{H'O}} = \frac{4}{3}$; $\frac{\overline{NI}}{\overline{NM}} = \frac{3}{2}$; $\frac{\overline{BeO}}{\overline{BeI}} = \frac{1}{2}$ По теореме Менелая для $\triangle OMI$, точки H',N, Be лежат на одной прямой. Применим теперь теорему Менелая для прямой MO и треугольника $IBeN$. Получим, что $\frac{\overline{H'Be}}{\overline{H'N}} = \frac{\overline{OBe}}{\overline{OI}} \cdot \frac{\overline{MI}}{\overline{MN}}$
$\frac{\overline{OBe}}{\overline{OI}} = -1$; $\frac{\overline{MI}}{\overline{MN}} = -\frac{1}{2}$. Значит, $\frac{\overline{H'Be}}{\overline{H'N}} = \frac{1}{2}$, то есть Be - середина отрезка $H'N$, что и требовалось доказать.



Утверждение про Be_A,Be_B,Be_C доказывается аналогично.

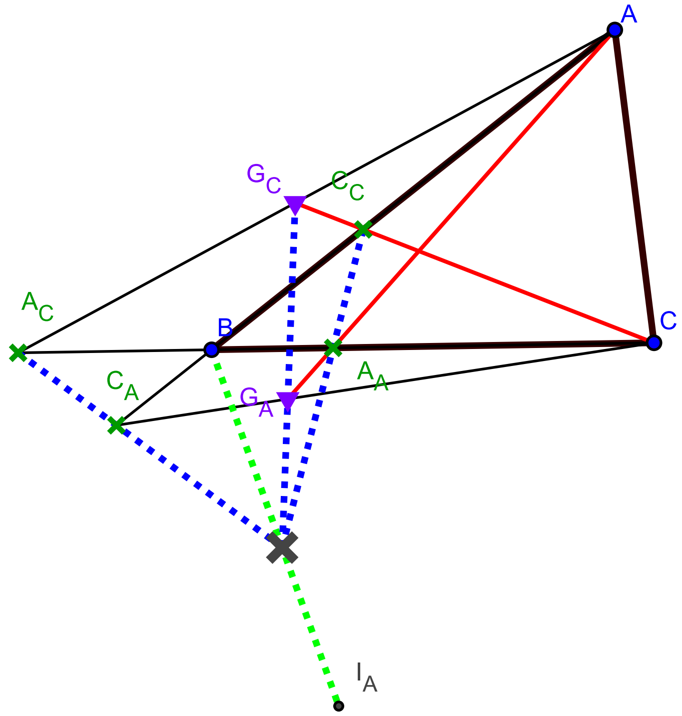
Замечание. Пусть l - прямая, проходящая через H',Be,N. Аналогично можно определить прямые l_A,l_B,l_C. Если $\triangle ABC$ неранобедренный, то прямые l,l_A,l_B,l_C попарно различны. Действительно, пусть, например, совпали l и l_A. Сделаем гомотетию с центром в точке M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Точки N,N_A,N_B,N_C перейдут в I,I_A, I_B, I_C соответственно, H' - в H. Раз l и l_A совпали, точки I_A,I, H лежат на одной прямой. Эта прямая - внутренняя биссетриса угла BAC. Поскольку на ней лежит H, она является и высотой треугольника. Это противоречит неравнобедренности трегольника ABC.

10. Точки A, A_A, G_A лежат на одной прямой. Аналогично, на одной прямой лежат C, C_C, G_C. Применим для двух указанных троек точек теорему Паппа. Получим, что точки $AC_C \cap CA_A$, $C_CG_A \cap A_AG_C$, $AG_C \cap CG_A$ коллинеарны. $AC_C \cap CA_A = B$. Осталось показать, что $AG_C \cap CG_A$ лежит на прямой BG. AG_C проходит через A_C, CG_A - через C_A, BG - через B_0. Значит, прямые AG_C, CG_A, BG проходят через N_B. Утверждение доказано.



N
B
A
G
C
C
C
B
G
A
A
A
G
C

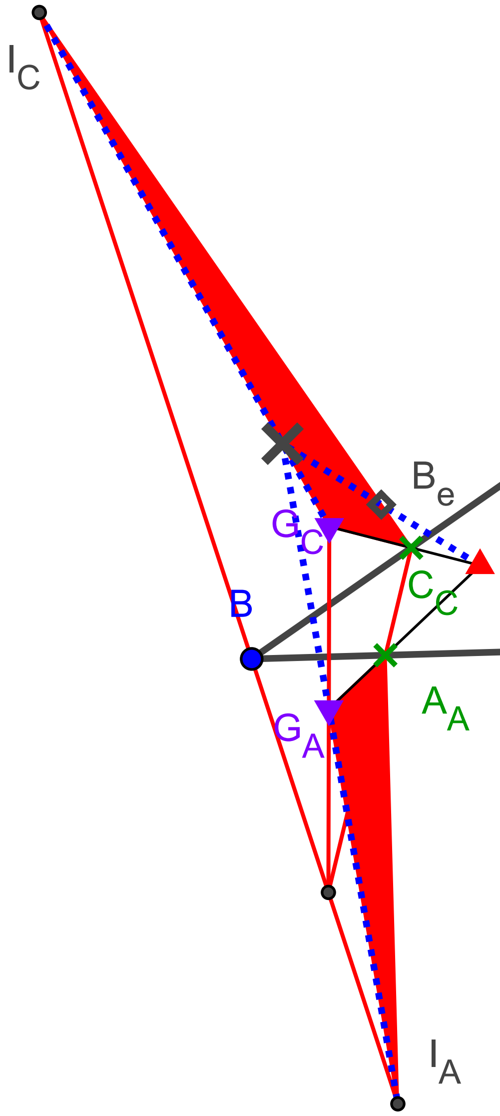
11'. Применим теорему Паппа для троек точек A, A_A, G_A и C, G_C, C_C. точки $AC_C \cap CG_A$, $C_CA_A \cap G_AG_C$, $AG_C \cap CA_A$ коллинеарны. Заметим, что $AC_C \cap CG_A = C_A$; $AG_C \cap CA_A = A_C$. Значит, прямые C_CA_A, C_AA_C, G_AG_C конкурентны. Отрезки BC_A и BA_A равны как касательные к вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Значит, C_A и A_A симметричны относительно внешней биссектрисы угла B. Аналогично, C_C и A_C симметричны относительно внешней биссетрисы угла B. Следовательно, прямые A_AC_C и A_CC_A пересекутся на прямой I_AI_C. Значит, прямые C_CA_A, C_AA_C, G_AG_C, I_AI_C конкурентны, что и требовалось показать.



11. Аналогично, конкурентны, например, прямые A_BC_0, C_BA_0, G_BG, BI. Теорему Паппа нужно применить для троек точек A, G_B, B_A и C, C_0, G. Можно найти ещё аналогичные четвёрки конкурентных прямых.

12. Согласно утверждению задачи 11, прямые A_AC_C, G_AG_C, I_AI_C конкурентны. Следовательно, треугольники $A_AG_AI_A$ и $C_CG_CI_C$ перспективны. По теореме Дезарга, точки $A_AG_A \cap C_CG_C$, $A_AI_A \cap C_CI_C$, $G_AI_A \cap G_CI_C$ коллинеарны. $A_AG_A \cap C_CG_C = N$. $\triangle ABC$ является ортотреугольником в $\triangle I_AI_BI_C$. Поскольку $I_CC_C \perp AB$ (стороне ортотреугольника), I_CC_C проходит через центр описанной около $\triangle I_AI_BI_C$ окружности. Аналогично, через него

проходит и $I_A A_A$. Таким образом, $A_A I_A \cap C_C I_C = Be$. Значит, $I_A G_A \cap I_C G_C$, Be, N коллинеарны, что и требовалось доказать.



12'. Применив теорему Дезарга для $\triangle C_A G_A I_A$ и $\triangle A_C G_C I_C$, получаем, что $I_A G_A \cap I_C G_C$, Be_B, N_B коллинеарны.

13. Согласно утверждению задачи 12, $I_A G_A \cap I_C G_C$ лежит на прямой l. Аналогично, $I_A G_A \cap I_C G_C$ лежит на прямой l_B. Если $\triangle ABC$ неравнобедренный, l и l_B различны. При этом обе указанные прямые проходят через H' по утверждению задачи 9. Следовательно, $I_A G_A \cap I_C G_C = H'$. Так же, IG и $I_B G_B$ проходят через H'. Для равнобедренных треугольников наше

утверждение следует из соображений непрерывности.