Какого цвета моя шляпа?

Задачу представляют:
Кохась К., Куюмжиян К., Челноков Г.

Следующая задача широко известна, но если вы ее еще не встречали, воспринимайте ее как вызов своему интеллекту. Эта задача будет разобрана после открытия конференции и не влияет на результаты конкурса. Речь идет об объекте, который имеет всего 4 состояния! Итак,

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ ВЫЗОВ: число 4 против миллиардов нейронов вашего мозга!

Вам и мне надевают на голову шляпу. Каждая из шляп может быть черной или белой. Вы видите мою шляпу, я — вашу, но никто из нас не видит при этом своей шляпы. Каждый из нас (не подглядывая, не общаясь и не подавая друг другу никаких сигналов) должен попытаться угадать цвет своей шляпы. Для этого по команде одновременно каждый из нас должен назвать цвет — «черный» или «белый». Если хоть один из нас угадал — мы выиграли. Перед тем как все это произойдет, нам дали возможность посовещаться. Как нам следует действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?

1 *Несколько задач о мудрецах*

Есть несколько мудрецов и большой запас шляп k различных цветов. С мудрецами проводят следующий ТЕСТ. Ведущий надевает мудрецам шляпы так, что в результате каждый видит шляпы всех остальных мудрецов, но не видит своей шляпы и не знает ее цвета. Мудрецы не общаются. По команде ведущего мудрецы одновременно называют цвет. Считается, что мудрецы успешно прошли тест = «выиграли», если хотя бы один из них угадал.

Перед тестом мудрецам сообщили правила теста и дали возможность устроить СОВЕЩАНИЕ, чтобы они могли договориться о том, как действовать во время теста. Стратегия мудрецов должна быть детерминированной — каждый мудрец должен назвать цвет, исходя только из того, какие цвета он видит у остальных.

1.1. Есть n мудрецов и шляпы n цветов. Докажите, что в этой ситуации мудрецы выигрывают.

1.2. Пусть имеются шляпы трех цветов и n мудрецов стоят в шеренгу так, что каждый видит лишь соседей (а крайние — одного соседа). Докажите, что в этой ситуации мудрецы проигрывают.

a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) n — произвольное.

1.3. Есть $10k$ мудрецов и шляпы k цветов (опять все видят всех). Докажите, что 10 мудрецов заведомо смогут угадать свой цвет, а вот 11 — вообще говоря, нет.

1.4. Есть $4k-1$ мудрецов, $2k$ черных и $2k$ белых шляп. Ведущий незаметно прячет одну шляпу, а остальные надевает на мудрецов. Какое наибольшее число мудрецов смогут угадать цвет своей шляпы?

1.5. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба, у них шляпы трех цветов. Каждый мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов. Как им действовать, чтобы выиграть?

1.6. У трех мудрецов шляпы двух цветов. Пусть теперь мудрецам разрешается пасовать, т. е. сказать «пас», что означает отказ от угадывания. Пусть мудрецы выигрывают, только при условии, что хотя бы один из них угадал правильно, и при этом никто не угадал неправильно. Будем считать, что все расклады шляп равновероятны и что стратегия мудрецов, как и в предыдущих задачах, детерминированная. Теперь уже мудрецы заведомо не могут обеспечить себе стопроцентный выигрыш. Например стратегия «Мудрец A всегда говорит “черный”, остальные всегда говорят “пас”» выигрывает лишь в половине случаев. Оптимальная стратегия — это стратегии, которая для всевозможных раскладов шляп дает наибольшее число выигрышей.

a) Предложите стратегию мудрецов, для которой они выигрывают больше чем в 50 % случаев.

b) Найдите оптимальную стратегию и докажите, что она оптимальна.

2 Мудрецы на неориентированном графе

Будем рассматривать более общую задачу. Пусть дан неориентированный граф G, в каждой вершине которого находится один мудрец. Мудрецы знакомы друг с другом и расположение мудрецов по вершинам известно всем. В частности, каждый мудрец понимает, в какой вершине находится каждый из его соседей. Мы будем отождествлять вершину графа и мудреца, который в ней находится. Во время теста каждый мудрец видит только шляпы мудрецов, находящихся в соседних вершинах графа. Остальные правила те же самые — мудрецы должны на совещании выработать стратегию, позволяющую хотя бы одному из них угадать цвет своей шляпы.

При необходимости можно пользоваться следующим формализмом. Пусть цвета шляп пронумерованы числами от 1 до k, пусть $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, k\}$, и пусть у каждой вершины v графа G соседние вершины (пусть d — их количество) упорядочены по возрастанию номеров u_{n_1}, u_{n_2}, $\ldots u_{n_d}$. Стратегия мудреца v — это функция $f_v\colon \underbrace{\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C}}_{d \text{ раз}} \to \mathcal{C}$. Эти функции выбираются мудрецами на совещании. Действия мудрецов по угадыванию состоят в том, что каждый мудрец v вычисляет $f_v(c_1, c_2, \ldots, c_d)$, где $c_i \in \mathcal{C}$ — цвет шляпы мудреца в вершине v_{n_i}.

Задача 1.1 показывает, что если мудрецы находятся в вершинах графа и могут видеть только соседних мудрецов, то в случае, когда граф имеет k-клику, хотя бы один мудрец сможет угадать свою шляпу. Вопрос становится нетривиальным, если граф не имеет k-клик.

2.1. Докажите, что на четырехвершинном графе «куриная лапа» мудрецы проигрывают ($k \geqslant 3$).

2.2. Докажите, что на любом дереве мудрецы проигрывают ($k \geqslant 3$).

Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Пусть V — множество из трех элементов (цветов шляп). Пусть $V_i = V$ — множество цветов шляп, которые можно дать i-му мудрецу. Допустим, что мудрецы уже определились со стратегией. Это значит, что i-й мудрец выбрал себе функцию $f_i\colon V_{i-1} \times V_{i+1} \to V_i$ (всюду нумерация циклическая). Будем говорить, что последовательность цветов abc, где $a \in V_{i-1}$, $b \in V_i$, $c \in V_{i+1}$, является короткой *опровергающей цепочкой*, если $b \neq f_i(a, c)$. Более длинная цепочка цветов $S = s_1 s_2 \ldots s_m$, где $s_1 \in V_\ell$, $s_2 \in V_{\ell+1}$, $\ldots$, $s_m \in V_{\ell+m-1}$, называется опровергающей цепочкой, если каждый ее трехэлементный фрагмент является короткой опровергающей цепочкой. Если выбрана опровергающая цепочка S обозначим $\ell_+(S)$ — число способов продолжить S на один шаг вправо, т. е. число способов выбрать цвет $s_{m+1} \in V_{\ell+m}$, чтобы получилась более длинная опровергающая цепочка. Аналогично обозначим через $\ell_-(S)$ число способов продолжить S на один шаг влево.

2.3. Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Докажите, что если нашлась опровергающая цепочка $S = s_1 s_2 \ldots s_m$, где $2 \leqslant m \leqslant n - 1$, для которой $\ell_-(s_1 s_2) + \ell_+(s_{m-1} s_m) \geqslant 5$, то стратегия мудрецов не выигрышная.

2.4. Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Пусть мудрецы выбрали выигрышную стратегию. Докажите, что для любого мудреца i и любой пары цветов $a \in V_{i-1}$, $b \in V_i$ выполнено равенство $\ell_-(ab) + \ell_+(ab) = 4$.

2.5. Докажите, что при $k = 3$ на графе «цикл из $3n$ звеньев» мудрецы выигрывают.

2.6. Докажите, что при $k = 3$ на графе «цикл из n звеньев» мудрецы проигрывают, если n не делится на 3 и $n \neq 4$.

Следующие задачи показывают, что для выигрыша мудрецов наличие больших клик в графе не является необходимым.

2.7. Докажите, что любого числа цветов k существует двудольный граф, на котором мудрецы выигрывают.

2.8. Пусть G — граф, на котором мудрецы выигрывают, имея шляпы q цветов. Пусть K_r — полный граф на r вершинах (на нем, как мы знаем, мудрецы выигрывают, имея шляпы r цветов). Построим на основе G новый «большой» граф $\widetilde{G}$. Для этого каждую вершину графа G заменим на копию графа K_r. Если две вершины графа G были соединены ребром, проведем ребра между всеми парами вершин соответствующих копий. Полученный граф и есть граф $\widetilde{G}$.

Докажите, что на графе $\widetilde{G}$ мудрецы выигрывают при $k = qr$.

2.9. Если $k = 3m$, то существует граф с $4m$ вершинами и максимальной кликой не более $2m$, на котором мудрецы выигрывают.

3 Мудрецы на ориентированном графе

Теперь будем считать, что мудрецы находятся в вершинах ориентированного графа, мудрец А видит мудреца Б, только если в графе есть ориентированное ребро АВ.

3.1. Докажите, что на графе «ориентированный цикл из n звеньев» мудрецы выигрывают ($k = 2$).

3.2. Мудрецы сидят в вершинах ориентированного графа, каждый видит только соседних, шляпы двух цветов. Пусть c — наибольшее количество вершинно независимых циклов в графе. Докажите, что существуют графы, для которых больше c мудрецов смогут угадать свой цвет ($k = 2$).

3.3. Пусть a — наименьшее число вершин, которое следует удалить из графа, чтобы он стал ациклическим. Докажите, что вообще говоря, не более a мудрецов смогут угадать цвет ($k = 2$).

3.4. Назовем ориентированный граф G *полудвудольным*, если множество его вершин можно разбить на две части L и R так, что между вершинами части L нет ребер, между вершинами части R могут быть ребра, но соответствующий граф — ациклический, а между частями L и R могут быть произвольные ребра.

Пусть k — по прежнему число шляп, s — произвольное натуральное число. Докажите, что если на полудвудольном графе $|L| = k - 2$, $|R| = s$, то мудрецы проигрывают.

Добавление после промежуточного финиша

Вариации предыдущих сюжетов

2.10. Три мудреца А, В, С, все видят друг друга, за исключением того, что мудрец А не видит мудреца В; $k = 3$. Докажите, что мудрецы проигрывают.

2.11. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба, у них шляпы трех цветов. Каждый мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов, за исключением одного мудреца, который видит лишь одного соседа. Смогут ли мудрецы выиграть?

Пусть n мудрецов стоят по кругу, $k = 3$. Пусть мудрецы выбрали выигрышную стратегию. Будем называть пару цветов ab, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, *левой*, если выполнено равенство $\ell_-(ab) = 1$, *правой*, если выполнено равенство $\ell_-(ab) = 3$, и *инертной*, если выполнено равенство $\ell_-(ab) = 2$.

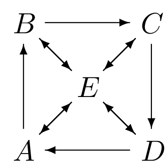
2.12. Докажите, что среди пар ab, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, поровну левых и правых.

2.13. Пусть $n \geqslant 4$. Докажите, что если ab — правая пара цветов, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, то среди пар цветов c_1a, c_2a, c_3a, где $\{c_1, c_2, c_3\} = V_{i-1}$, ровно одна левая пара цветов, ровно одна правая и ровно одна инертная.

2.14. То же, что в задаче 1.4, но есть $mk - 1$ мудрецов и шляпы k цветов — по m шляп каждого цвета, причем m четно или k нечетно (или и то, и другое одновременно). Одну шляпу незаметно прячут. Докажите, что наибольшее число мудрецов, которые смогут заведомо угадать свой цвет, равно $\frac{1}{2}(mk + m - 2)$.

2.15. Мудрецы стоят в две шеренги: в первой шеренге n мудрецов, а во второй — n^n мудрецов, у них шляпы $(n+1)$ цветов. Мудрецы видят только тех, кто стоит в другой шеренге. Докажите, что мудрецы могут действовать так, чтобы хотя бы один угадал.

3.5. Какое наибольшее число мудрецов сумеют угадать цвет на следующем графе $(k = 2)$?



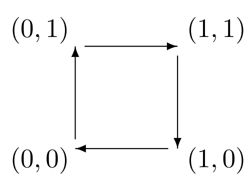
4 *Гиперкуб.*

Под n-мерным гиперкубом мы понимаем граф, вершины которого занумерованы наборами из n нулей и единиц. Ребрами соединены вершины, номера которых отличаются ровно в одном разряде.

4.1. Докажите алгебраически, что 32 мудреца, стоящие в вершинах пятимерного гиперкуба, выигрывают $(k = 3)$.

Пусть количество мудрецов равно n, а $k = 2$, причем цвета шляп мы будем обозначать нулями или единицами. Пусть фиксирована какая-либо стратегия мудрецов. Рассмотрим n-мерный гиперкуб и с его помощью «закодируем» эту стратегию. Это делается следующим образом. Вершины гиперкуба соответствуют наборам из n нулей и единиц, свяжем с i-м мудрецом i-й элемент этого набора. Пусть i-й мудрец (для примера возьмем $n = 5$, $i = 2$) видит цвета шляп других мудрецов, скажем, 1, *, 0, 1, 1 (в качестве второго элемента мы поставили звездочку, которая символизирует, что в нашем примере i-й, т. е. второй мудрец не видит своей шляпы). В гиперкубе есть две вершины с таким набором координат: $(1, 0, 0, 1, 1)$ и $(1, 1, 0, 1, 1)$, причем эти вершины соединены ребром. Стратегия i-го мудреца, собственно, и состоит в том, что он должен «выбрать» одну из этих вершин. Поставим на ребре стрелку, ведущую от невыбранной вершины к выбранной. Расставив подобным образом стрелки на всех ребрах, мы получим наглядную модель стратегии.

Например, стратегия мудрецов из задачи «Интеллектуальный Вызов» описывается следующей ориентацией двумерного гиперкуба:



4.2. Пусть имеется n мудрецов и шляпы красного и синего цвета. Все всех видят. Как мы знаем из задачи 1.3, $[n/2]$ мудрецов смогут угадать свой цвет правильно. Докажите, что существует «сбалансированная по цветам» стратегия угадывания, а именно, стратегия, обладающая свойством: для любой раздачи шляп верно, что если роздано r красных и b синих шляп, то по крайней мере $[r/2]$ мудрецов с красными шляпами угадают цвет и $[b/2]$ мудрецов с синими шляпами угадают цвет.

4.3. Пусть $2n$ мудрецов пользуются оптимальной стратегией, т.е. стратегией, которая дает не менее n правильных догадок. Докажите, что эта стратегия «несмещенная» (в сторону одного из цветов), а именно: для каждого мудреца верно, что если рассмотреть все возможные расклады шляп, то ровно в половине случаев мудрец, угадывая, называет первый цвет и ровно в половине случаев — второй.

Решения

1.1. Пусть цвета — это остатки по модулю n. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей. Пусть k-й мудрец проверит гипотезу «сумма всех шляп равна k по модулю n». Тогда ровно один мудрец угадает.

1.2. Утверждение этой задачи — частный случай задачи 2.2.

1.3. [1, Theorem 2]

Для начала приведем стратегию, для которой 10 мудрецов выигрывают. Разделим всех мудрецов на 10 равных групп и воспользуемся задачей 1.1.

Предположим, существует стратегия, гарантирующая 11 правильных угадываний при любой расстановке цветов. Рассмотрим все k^{10k} возможных расстановок. Рассмотрим какие-то k расстановок, отличающихся только цветом первой шляпы. Поскольку стратегия детерминированная, во всех этих расстановках первый мудрец должен называть один и тот же цвет, значит, в этих k случаях он правильно угадает цвет в сумме только один раз. Разбив все начальные ситуации на такие группы по k, заключим, что всего первый мудрец правильно угадывает цвета k^{10k-1} раз. Поскольку для остальных мудрецов верно то же рассуждение, все мудрецы во всех ситуациях в сумме правильно угадают цвет $10k \cdot k^{10k-1}$ раз, что меньше, чем $11 \cdot k^{10k}$.

1.4. [3, пункт 4.2] Для начала докажем, что никакая стратегия не может гарантировать строго больше $3k-1$ угадавших в любой ситуации.

Рассмотрим произвольного мудреца. Если на нем шляпа того же цвета, что и спрятанная, то он видит $2k$ шляп одного цвета и $2k-2$ другого, таким образом знает, что его цвет – тот которого меньше.

Если его шляпа не того же цвета, что спрятанная, то назовем такого мудреца *сомневающимся*. Рассуждая аналогично задаче 1.3, докажем, что при любой стратегии любой мудрец угадывает цвет шляпы ровно в половине тех ситуаций, в которых является сомневающимся мудрецом. В самом деле, пусть мудрец номер i является сомневающимся в ситуации A. Построим по ней ситуацию $h_i(A)$: поменяем местами шляпу i-го мудреца и спрятанную. Мудрец i остался сомневающимся и цвета всех шляп, которые он видит, не поменялись, так что он должен назвать тот же цвет. Таким образом можно все ситуации, в которых i является сомневающимся, разбить на пары вида $(A, h_i(A))$, и в каждой паре мудрец угадывает ровно один раз. Таким образом, никакая стратегия не гарантирует больше $2k-1+\frac{2k}{2} = 3k-1$ угадываний.

Построим стратегию, где угадываний будет ровно столько. Выпишем все возможные $\binom{4k}{2k}$ ситуаций, предпишем любому не сомневающемуся угадать свой цвет, далее будем по очереди каждому сомневающемуся в какой-то паре ситуаций $(A, h_i(A))$ сообщать, что он должен в этом случае сказать. Возьмем любую ситуацию A_1 и сомневающегося в ней мудреца i. Предпишем ему назвать цвет его шляпы в A_1, таким образом в A_1 появился один правильно угадавший сомневающийся, а в $h_i(A)$ появился ошибшийся. Назовем $A_2 = h_i(A)$ и повторим процесс: для A_2 найдем другого сомневающегося j, научим его правильно угадывать в ситуации A_2 и ошибаться в $h_j(A_2)$, и т. д., пока не окажется $A_k = A_1$. В этот момент во всех рассмотренных ситуациях есть поровну сомневающихся, угадавших цвет правильно и неправильно. Если еще не все сомневающиеся во всех ситуациях определились — продолжим процесс.

1.5. Утверждение этой задачи мы взяли в [7]. Приводимое здесь решение М. Иванова, хотя и описывает ту же стратегию игроков, что и в [7], но благодаря изящной алгебраической интерпретации делает ее совершенно прозрачной и мотивированной.

Пусть цвета — это остатки 0, 1, 2 по модулю 3. Тогда нам необходимо найти такие функции $f_A(D,B)$, $f_B(A,C)$, $F_C(B,D)$, $f_D(C,A)$, чтобы для любых значений A, B, C, D хотя бы одна из функций имела бы значение, совпадающее со значением соответствующей переменной по модулю 3.

Будем искать эти функции в классе линейных функций.

Сначала подберем выражения $A \pm B \pm C + \text{const}$, $A \pm C \pm D + \text{const}$, $A \pm B \pm D + \text{const}$, $B \pm C \pm D + \text{const}$ так, чтобы при любых A, B, C, D хотя бы одно из этих выражений было сравнимо с нулем по модулю 3. Это можно сделать с помощью следующего изящного наблюдения, которое к тому же позволяет обойтись без дополнительных констант. Заметим, что

$$(A+B+C)^2+(A-C+D)^2+(A-B-D)^2+(B-C-D)^2 = \\ = 3(A^2+B^2+C^2+D^2) \equiv 0 \pmod 3. \tag{1}$$

Если при каких-то A, B, C, D каждое из выражений

$$A+B+C, \quad A-C+D, \quad A-B-D, \quad B-C-D \tag{2}$$

оказалось не равным 0 по модулю 3, то квадраты выражений давали бы остатки 1 по модулю 3, и тогда сумма (1) не могла бы делиться на 3. Значит, для любых целых A, B, C, D хотя бы одно из выражений (2) обращается в 0 по модулю 3.

Положим тогда $f_B = -A-C$, $f_D = C-A$, $f_A = B+D$, $f_C = B-D$. Переводя на язык простых рецептов, мудрец A называет в качестве своей гипотезы сумму $B+D$, мудрец B называет $-A-C$, мудрец C называет $B-D$, мудрец D называет $C-A$.

Замечание. На самом деле, формула (1) — это просто произведение $(A^2+B^2+C^2+D^2)(1^2+1^2+1^2+0^2)$, разложенное по формуле Эйлера

$$(A^2+B^2+C^2+D^2)(a^2+b^2+c^2+d^2) = \\ = (Aa+Bb+Cc+Dd)^2+(Ac-Ca+Db-Bd)^2+ \\ +(Ab-Ba+Cd-Dc)^2+(Ad-Da+Bc-Cb)^2.$$

1.6. [2, стр.160] Приведем пример стратегии, выигрывающей в 6 случаях из 8. Пусть мудрец, если видит на двух других шляпы одного цвета, называет другой цвет, а если видит шляпы разных цветов — молчит. Тогда если все три шляпы одного цвета — то в обоих таких случаях все три мудреца ошиблись, если же шляпы не одного цвета, то имеется две шляпы одного и одна другого. Тогда каждый из двоих владельцев шляп цвета большинства промолчит, тот, на ком шляпа другого цвета, правильно назовет ее цвет, итого шесть выигрышных ситуаций.

Докажем, что стратегии лучше быть не может. Пусть стратегия предписывает какому-то мудрецу, видя некоторую пару цветов на двух остальных, назвать цвет. Это соответсвует некоторым двум расстановкам шляп (на самом мудреце шляпа может быть первого или второго цвета), так что мудрец сделает одно человекоугадывание и одно человеконеугадывание. Суммируя по всем ситуациям и по всем мудрецам, заключаем, что человекоугадываний и человеконеугадываний поровну.

В каждой выигрышной ситуации есть хотя бы одно человекоугадывание и ни одного человеконеугадывания, в каждой проигрышной не больше трех человеконеугадываний (потому что мудрецов всего трое). Значит, соотношение количества выигрышных ситуация к проигрышным не больше $3:1$.

Это рассуждение легко обобщается на случай произвольного числа мудрецов. Выше доказано, что выигрышных ситуаций не больше чем $2^n\frac{n}{n+1}$ (здесь и далее число мудрецов обозначено через n). Оценка достигается для n вида $n = 2^k - 1$ при натуральном k. Для удобства будем кодировать каждую из 2^n ситуаций словом длинны n из нулей и единиц. Нам потребуется

Утверждение. Для $n = 2^k - 1$ из всех слов из нулей и единиц длинны n можно выбрать $2^n \frac{n}{n+1}$ *кодовых слов* так, что любое слово или выбрано или отличается в одном разряде от выбранного (такая выборка называется *совершенным кодом Хэмминга с кодовым расстоянием 3* или *кодом Хэмминга, исправляющим одну ошибку*). Приведем стратегию, при которой мудрецы выигрывают на всех невыбранных последовательностях и проигрывают на выбранных.

Стратегия: то что видит мудрец есть слово без одного разряда. Если оно является куском кодового слова — то мудрец называет не тот символ, который в этом слове стоит в его разряде. Иначе молчит. Тогда если слово не является кодовым, то оно отличается в одном разряде от кодового, и только мудрец соответствующий этому разряду видит кусок правильного слова, значит назвав неправильный цвет угадывает. Если исходное слово кодовое — то все мудрецы одновременно ошибаются.

2.1. Допустим, что у мудрецов есть выигрышная стратегия. Пусть v — центр лапы, u_1, u_2, u_3 — висячие вершины. Назначим вершине v первый цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета h_1, h_2, h_3.

Теперь проведем второй эксперимент: назначим вершине v второй цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета e_1, e_2, e_3.

Теперь проведем финальный эксперимент. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через d_i цвет, который не был назван мудрецом u_i в первых двух экспериментах (если есть выбор — берем любой цвет из двух возможных). Для каждого i назначим висячей вершине u_i цвет d_i. Цвета шляп у соседей мудреца v уже заданы, значит, известен его ответ по стратегии. Назначим вершине v тот из цветов — первый или второй, который не совпадает с этим ответом. Мудрецы проиграли.

2.2. Это лемма 8 из [1].

Докажем индукцией по числу вершин следующее утверждение. Пусть T — произвольное дерево, v — его произвольная вершина, c_1, c_2 — два произвольных цвета. Пусть мудрецы уже выбрали себе стратегию Г. Тогда существует распределение шляп по вершинам, проигрышное для мудрецов, при котором вершина v покрашена в цвет c_1 или c_2.

База индукции — одна вершина — тривиальна.

Докажем переход. При удалении вершины v дерево распадается на части T_1, T_2, ... Обозначим через u_1, u_2, ... вершины в этих поддеревьях, соседние с v. Аналогично предыдущей задаче проведем два эксперимента: в первом зададим шляпе в вершине v цвет c_1 и переберем всевозможные распределения шляп в деревьях T_i, неудачные для мудрецов, когда они используют в T_i стратегию Г. Пусть H_i — множество цветов, которые может принимать в этих неудачных раскрасках шляпа u_i. Во втором эксперименте зададим шляпе в вершине v цвет c_2 и построим множество цветов E_i, которые может иметь шляпа u_i во всевозможных неудачных раскрасках.

Заметим, что в обоих экспериментах стратегии мудрецов на каждом дереве T_i отличаются разве лишь функцией, которую использует мудрец u_i. Это значит, что если бы еще и цвет шляпы в вершине u_i был фиксирован, то для каждого расклада шляп на дереве T_i остальные мудрецы в обоих экспериментах давали бы одинаковые ответы.

По индукционному предположению множества H_i и E_i состоят не менее чем из двух элементов каждое, и поэтому пересекаются. Пусть d_i — какой-нибудь цвет из пересечения этих множеств. При каждом i назначим вершине u_i цвет d_i, а для остальных вершин дерева T_i возьмем подходящую неудачную для мудрецов раскраску. Теперь у вершины v заданы цвета всех соседей, следовательно, ответ мудреца v задан однозначно. Назначим шляпе v тот из цветов c_1, c_2, который не совпадает с этим ответом. Мудрецы проиграли. Индукционный переход доказан.

2.3. [7, Lemma 2c] Можно считать, что $\ell_-(s_1 s_2) = 3$, $\ell_+(s_{m-1} s_m) \geqslant 2$.

Проверим, что если $\ell_+(s_{m-1} s_m) \geqslant 2$, то путь можно продолжить вправо, добавив к нему вершину s_{m+1} так, что $s_1 s_2 \ldots s_{m+1}$ — это опровергающая цепочка и на ее краю снова выполнено неравенство $\ell_+(s_m s_{m+1}) \geqslant 2$.

Действительно, потенциально у нас есть два таких продолжения, скажем $s_m v_1$ и $s_m v_2$. Рассмотрим короткие цепочки $s_m v_1 w$ и $s_m v_2 w$, назовем *перспективной* ту из них (любую из них, если годятся обе), для которой $v_i \neq f_{m+1}(s_m, w)$. Аналогично выберем перспективную цепочку для каждого из двух остальных значений w. Мы наметили три перспективные цепочки, по крайней мере у двух из них совпадают цвета v_i. В качестве s_{m+1} и следует взять цвет v_i.

Итак, мы можем продолжать нашу цепочку сколь угодно далеко вправо. Осталось позаботиться о том, чтобы эта цепочка «зациклилась». Перед зацикливанием у нас имеется длинная цепочка $xs_1s_2\dots s_{n-1}y$, где для вершины x имеется три варианта выбора, а для вершины y — хотя бы два варианта. Мы без труда выберем $x = y$, для которых $x \neq f_n(s_{n-1}s_1)$.

В результате получилась циклическая опровергающая цепочка. Мудрецы проиграли.

2.4. [7, Lemma 2d]

Если имеется двухэлементная цепочка s_1s_2, для которой $\ell_-(s_1s_2) + \ell_+(s_1s_2) > 4$, то по утверждению предыдущей задачи мудрецы проиграли.

С другой стороны, заметим, что для заданного s сумма

$$\ell_+(ss_1) + \ell_+(ss_2) + \ell_+(ss_3) = 6 \tag{3}$$

(где s_1, s_2, s_3 — три различных цвета). Действительно, для каждого цвета w существует ровно два цвета s_i, для которых $s_i \neq f(s, w)$, а так как w можно выбрать тремя способами, получаем 6 вариантов продолжений.

В силу сделанного наблюдения

$$\sum_{s_1,s_2} \ell_+(s_1s_2) = 18. \tag{4}$$

Таким образом, среднее значение величины $\ell_+(s_1s_2)$ равно 2. Аналогично среднее значение величины $\ell_-(s_1s_2)$ равно 2.

Возвращаясь к нашей задаче, заметим, что если для какой-то двухэлементной цепочки s_1s_2 выполнено неравенство $\ell_-(s_1s_2) + \ell_+(s_1s_2) < 4$, то обязательно найдется цепочка $s'_1s'_2$, для которой $\ell_-(s'_1s'_2) + \ell_+(s'_1s'_2) > 4$, и мудрецы опять проиграют.

Таким образом, выигрышная стратегия может существовать лишь при условии $\ell_-(s_1s_2) + \ell_+(s_1s_2) = 4$ для всех s_1, s_2.

2.5. [7] Покажем, как может выглядеть стратегия мудрецов на цикле из $N = 3n$ вершин, чтобы для нее не нашлось ни одной опровергающей цепочки.

Из утверждений задач 2.12, 2.13 следует, что для выигрышной стратегии количество правых пар цветов вида ab, где $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, одинаково при всех i. (Аналогично одинаково количество левых пар и инертных пар.) Из этих же утверждений вытекает, что любая цепочка, опровергающая выигрышную стратегию, должна состоять из звеньев одинакового типа (то есть в ней все пары цветов соседних шляп правые, либо все левые, либо все инертные), в этом случае всю цепочку будем называть левой, правой или инертной. Действительно, как мы видели в решении задачи 2.13, любая левая пара цветов ab_1 имеет единственное продолжение влево до более длинной цепочки c_1ab_1, и при этом пара c_1b — опять левая. Аналогично однозначно задано продолжение правой цепочки вправо так, что на краю окажется опять правая цепочка. Таким образом, циклическая цепочка, опровергающая всех мудрецов, должна состоять из звеньев одного типа.

Мы подберем такую стратегию, для которой при всех i имеется три правых пары ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, три левых пары и три инертных. В этом случае элементы множеств V_i можно пронумеровать таким способом $V_i = \{v^i_1, v^i_2, v^i_3\}$, что цепочки $v^1_1 v^2_1 v^3_1 \dots$, $v^1_2 v^2_2 v^3_2 \dots$, $v^1_3 v^2_3 v^3_3 \dots$ — правые. Мы, однако, выписали лишь начала этих цепочек, но при попытке построить циклическую цепочку может случиться, что цепочка не зацикливается с периодом N и при продолжении $v_1^1 v_1^2 v_1^3 \dots v_1^N v_1^{N+1}$ оказывается, что $v_1^{N+1} = v_2^1$ или $v_1^{N+1} = v_3^1$. Обозначим $v_1^{N+1} = v_{\sigma(1)}^1$, $v_2^{N+1} = v_{\sigma(2)}^1$, $v_3^{N+1} = v_{\sigma(3)}^1$, очевидно, σ — это перестановка трехэлементного множества. Именно этого и должны добиваться мудрецы: им нужно придумать такую стратегию, чтобы локальные опровергающие цепочки не могли бы зациклиться в N-элементную цепочку, из-за того что перестановка σ не имеет неподвижных точек. То же должно быть выполнено для левых и для инертных цепочек. Рассмотрим подробнее, как они могут быть устроены в терминах введенной нумерации цветов.

У нас имеется три левых пары ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, можно считать, что это пары $v_1^i v_3^{i+1}$, $v_2^i v_1^{i+1}$, $v_3^i v_2^{i+1}$. Среди пар ab, $a \in V_{i-1}$, $b \in V_i$ тоже три левых. Заметим, что пара $v_3^{i-1} v_3^i$ правая, поэтому цепочка $v_3^{i-1} v_3^i v_1^{i+1}$ не является короткой опровергающей цепочкой, а тогда $v_3^{i-1} v_2^i v_1^{i+1}$ является опровергающей цепочкой, и это значит, что пара $v_3^{i-1} v_2^i$ есть «опровергающее продолжение» влево для пары $v_2^i v_1^{i+1}$, что означает, что пара $v_3^{i-1} v_2^i$ тоже левая. Рассуждая так же для других наборов индексов, получаем, что при всех i ($i = 1, 2, \dots, N$) множество левых пар ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$ состоит из пар

$$v_1^i v_3^{i+1}, \qquad v_2^i v_1^{i+1}, \qquad v_3^i v_2^{i+1}.$$

Но тогда левая цепочка, начинающаяся с цвета v_1^1 имеет вид $v_1^1 v_3^2 v_2^3 v_1^4 \dots$ и, таким образом, $(N+1)$-й элемент этой цепочки (напомним, что N делится на 3) имеет вид $v_{\sigma(1)}^{N+1}$. Значит, левая цепочка тоже не зациклится, если у перестановки σ нет неподвижных точек. Также обстоят дела и с инертными цепочками.

Осталось описать стратегию, которая создаст нам эту прекрасную картину. Пусть все мудрецы пользуются одной и той же стратегией

$$f_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

где элемент в p-й строке и в q-м столбце — это $f_i(p, q)$ и мы пользуемся соглашением $v_i^{N+1} = v_{\sigma(i)}^1$, где $\sigma : 1 \to 2 \to 3 \to 1$ — циклическая перестановка трехэлементного множества. Иными словами, если $v_1^i = 1$, $v_2^i = 2$, $v_3^i = 3$ при $1 \leqslant i \leqslant N$, то $v_1^{N+1} = 2$, $v_2^{N+1} = 3$, $v_3^{N+1} = 1$. Это соглашение обеспечивается свойством $f_i(\sigma(p), \sigma(q)) = \sigma(f_i(p, q))$, которое нетрудно проверить.

Проверку того, что эта стратегия обеспечивает поровну правых, левых и инертных пар цветов, оставляем читателю.

2.6. [7] В решении предыдущей задачи показана роль того, что длина цикла N делится на 3. Оказывается, что опровергающие цепочки имеют 3-периодическую структуру и благодаря этому мудрецы могут не позволить опровергающим цепочкам зациклиться.

В случае, когда N не делится на 3, цепочки обязательно зацикливаются. Для случая, когда при всех i имеется три правых пары ab, $a \in V_i$, $b \in V_{i+1}$, три левых и три инертных пары, это нетрудно понять из предыдущего решения.

Но возможны и другие количества правых, левых и инертных пар, для полного решения требуется внимательно изучить структуру цепочек в этих случаях. Читатель, который до сих пор не утратил любопытства в этом вопросе, может обратиться за подробностями к статье [7].

2.7. [1, theorem 7].

Формулировка задачи 3.4 подсказывает нам, что хотя бы в одной из долей должно быть не меньше $k-1$ вершины. Оказывается, эта оценка реализуется.

Пусть левая доля L нашего графа состоит из $n = k-1$ вершины, а правая доля R — из $m = k^{k^n}$ вершин. Пусть C — это множество всевозможных раскрасок доли L в k цветов. Ясно, что $|C| = k^n$. Тогда $m = k^{|C|}$ и, значит, число m равно количеству отображений из множества C во множество цветов $\{1, 2, \ldots, k\}$. Зафиксируем какую-нибудь биекцию между вершинами правой доли и множеством отображений из C во множество цветов $\{1, 2, \ldots, k\}$. Пусть мудрецы в правой доле в качестве стратегии используют эту биекцию: у каждого мудреца имеется «свое личное» отображение из C во множество цветов, и когда мудрец видит раскраску левой доли (это элемент из C), он называет в качестве цвета значение этого отображения на этой раскраске.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть c_R — это фиксированная раскраска правой доли. Рассмотрим множество C' всех таких раскрасок c_L левой доли, для которых в том случае, когда весь граф покрашен с помощью объединенной раскраски (c_L, c_R), никто из мудрецов правой части не угадал цвет. Тогда $|C'| < k$.

Доказательство леммы приведено ниже, а сейчас мы определим стратегию для мудрецов из левой доли L. Когда задана раскраска правой доли (и уже задана стратегия мудрецов в правой доле), мы можем построить множество C' из леммы. Оно будет содержать не более $n = k - 1$ элементов. Пусть c_1, c_2, …, c_n — список раскрасок левой доли, содержащей все раскраски из C'. Пусть тогда i-й мудрец в левой доле называет цвет $c_i(i)$.

Это выигрышная стратегия для мудрецов. Действительно, если никто из мудрецов правой доли не угадал, то левая доля раскрашена с помощью одной из раскрасок множества C'. Если эта раскраска присутствует в нашем списке как c_j, то j-й мудрец левой доли угадал цвет: он назвал цвет $c_j(j)$!

Осталось доказать лемму. Предположим на секундочку, что множество C' содержит k различных элементов c_1, …, c_k. Возьмем любое отображение f из C в $\{1, 2, \ldots, k\}$, которое принимает на этих k элементах k различных значений. Пусть $v \in R$ — вершина, соответствующая этому отображению f. Тогда множество цветов $\{f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_k)\}$ содержит все k цветов и, следовательно, один из этих цветов $f(c_i)$ совпадает с цветом вершины v. Получается, что при использовании в левой части раскраски c_i кто-то из мудрецов правой части все же угадал цвет правильно, что противоречит определению множества C'. Лемма доказана.

2.8. [4, лемма 1]. Но мы изложим это рассуждение человеческим языком.

На графе G мудрецы выигрывают, имея шляпы q цветов, — будем называть эти цвета теплыми. На графе K_r мудрецы выигрывают, имея шляпы r цветов, — будем называть эти цвета холодными. Покраску вершин графа $\widetilde{G}$ в qr цветов можно представлять себе как указание для каждой вершины двух цветов — одного теплого цвета и одного холодного. И тогда при угадывании мудрецы называют тоже два цвета: один теплый и один холодный.

Пусть мудрецы называют холодный цвет, глядя только на своих соседей по копии K_r (и на холодные компоненты цветов их шляп). Тогда ровно один мудрец в каждой копии угадает свой холодный цвет правильно, таких мудрецов назовем удачливыми. Каждый мудрец может с легкостью определить, кто из мудрецов в соседней копии K_r является удачливым. Для определения теплого цвета мудрец должен использовать стратегию на графе G, полагая, что его соседями в смысле графа G являются лишь удачливые мудрецы из соседних копий, и принимая во внимание лишь теплую компоненту цвета шляп этих мудрецов. Тогда по крайней мере один удачливый мудрец правильно угадает свой теплый цвет.

2.9. Это сразу следует из утверждений задач 1.5 и 2.8.

2.10. Подсчетом в стиле решения задачи 1.3 нетрудно убедиться, что в сумме по всем раскладам шляп имеется 3^3 верных угадываний — столько же, сколько и самих раскладов. Таким образом, при применении выигрышной стратегии для каждого расклада шляп ровно один мудрец должен угадать верно.

Для любой стратегии предъявим тогда расклад шляп, на котором угадывают два мудреца. Дадим мудрецу С произвольную шляпу. Потом дадим мудрецу А шляпу того цвета, который он назовет согласно стратегии, увидев, что надето на С. Наконец, дадим мудрецу Б шляпу того цвета, который он назовет согласно стратегии, увидев, какие шляпы надеты на А и С.

2.11. Обозначим мудрецов A, B, C, D, и пусть A не видит B. Сначала покажем, что найдутся две трёхэлементные цепочки $a_1d_1c_1$ и $a_1d_1c_2$, в которых A и D не угадывают. Для этого аналогично решению задачи 2.4 рассмотрим все 6 способов раздать цвета A и D так, чтобы A не угадал (его стратегия зависит только от цвета D), и 18 вариантов продолжить эти цепочки в сторону C. Так как D угадывает только в девяти случаях, есть цвет d_1, который он называет максимум 3 раза, и тогда среди шести цепочек с началом a_1d_1 или a_2d_1 хотя бы три проигрышные для D, и по принципу Дирихле найдутся две трёхэлементных цепочки $a_1d_1c_1$ и $a_1d_1c_2$, в которых A и D не угадывают. Выдадим A цвет a_1, а D — цвет d_1.

Теперь изучим стратегию мудреца B. Пусть $f_B(a_1, c_1) = b_1$, $f_B(a_1, c_2) = b_2$. Выдадим ему третий цвет b_3 (любой, если $b_1 = b_2$).

Заметим, что теперь мы знаем всё про соседей мудреца C: у B шляпа цвета b_1, а у D — цвета d_1. Но тогда $f_C(b_1, d_1)$ не совпадает с одним из c_1, c_2. Выдав ему неподходящий цвет, мы заставим всех мудрецов ошибиться.

2.12. [7, лемма 3a] Воспользуемся формулой (4) и аналогичной формулой для ℓ_-:

$$\sum_{a,b} \ell_+(ab) = \sum_{a,b} \ell_-(ab) = 18.$$

Поскольку мы рассматриваем выигрышную стратегию, для любых a, b $\ell_+(ab) + \ell_-(ab) = 4$. Следовательно, каждому слагаемому 1, 2, 3 в первой сумме соответствует слагаемое 3, 2, 1 во второй сумме. Значит, слагаемых 1 и 3 в обеих суммах поровну. Это и требовалось доказать.

2.13. [7, лемма 3d] Пусть $V_{i+1} = \{b, b_1, b_2\}$. Тогда аналогично формуле (3) с учетом равенства $\ell_-(s_1s_2) + \ell_+(s_1s_2) = 4$ имеем

$$\ell_-(ab) + \ell_-(ab_1) + \ell_-(ab_3) = 6.$$

Так как $\ell_-(ab) = 3$, остальные два слагаемых — это 1 и 2, можно считать, что $\ell_-(ab_1) = 1$, и значит, существует короткая опровергающая цепочка, скажем, c_1ab_1. Тогда $\ell_-(c_1a) = 1$, поскольку в противном случае $\ell_-(c_1a) + \ell_+(ab_1) \geqslant 5$ и по задаче 2.3 стратегия мудрецов не выигрышная. Применяя аналогичную формулу

$$\ell_-(c_1a) + \ell_-(c_2a) + \ell_-(c_3a) = 6,$$

мы видим, что здесь $\ell_-(c_1a) = 1$, значит, остальные два слагаемых — это 2 и 3, что и требовалось.

2.14. [1, Theorem 16.iii]

2.15. [4] Решение этой задачи требует более сложной конструкции, чем задача 2.7.

3.1. Все мудрецы, кроме одного, называют цвет, противоположный тому, который видят, а последний мудрец — называет тот цвет, который видит.

3.2. [1, пример 6] То, что не менее c мудрецов могут угадать угадать цвет, следует из утверждения предыдущей задачи. Пример графа, для которого число угадывающих мудрецов больше числа независимых циклов, приведен в задаче 3.5.

3.3. [1, лемма 4] Пусть при удалении вершин $v_1, v_2, \ldots, v_a$ граф становится ациклическим. Остальные вершины $v_{a+1}, \ldots, v_n$ пронумеруем так, чтобы ребра из этих вершин шли только в сторону убывания номеров. Иначе говоря, для последних $n - a$ вершин все выходящие ребра идут влево.

Теперь положим шляпы на первых a мудрецов произвольно. Для каждого следующего мудреца уже заданы цвета шляп у всех, кого он видит, следовательно, ответ, который должен он дать по стратегии, уже известен. Дадим этому мудрецу шляпу так, чтобы он не угадал.

При таком распределении шляп только первые a мудрецов смогут что-нибудь угадать.

3.4. [4, теорема 5] Возьмем произвольную стратегию мудрецов f и докажем, что она проигрышная.

Пусть A — множество цветов шляп, в котором один цвет пропущен, $|A| = k - 1$. Если a — какой-нибудь цвет, обозначим через w_a набор из $k-2$ цветов $(a, a, \dots, a)$. Мудрецам из части L мы будем всегда давать набор одинаковых шляп вида w_a, где $a \in A$.

Пусть r_1, r_2, $\dots r_s$ — вершины R, пронумерованные так, чтобы ребра шли в сторону убывания номеров, для удобства мы можем считать, что каждый мудрец в R видит всех мудрецов с меньшими номерами. Построим набор цветов $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$ для мудрецов из части R. Для этого последовательно выберем

$$\begin{aligned}
&y_1 \notin \{f_{r_1}(w_a),\ a \in A\};\\
&y_2 \notin \{f_{r_2}(w_a, y_1),\ a \in A\};\\
&\quad \dots\\
&y_s \notin \{f_{r_s}(w_a, y_1, y_2 \dots, y_{s-1}),\ a \in A\}.
\end{aligned}$$

Поясним этот выбор чуть подробнее на примере y_s. Мудрец в вершине r_s видит всех мудрецов части L (цвета их шляп заданы набором w_a), кроме того, он видит мудрецов части R с меньшими номерами. Значит, определен его ответ $f_{r_s}(w_a, y_1, y_2 \dots, y_{s-1})$ по стратегии. Поскольку цвет a пробегает $(k-1)$-элементное множество A, множество, написанное в правой части для выбора y_s, содержит не более $k-1$ элементов, поэтому цвет y_s действительно можно выбрать.

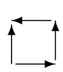
Итак, мы построили набор цветов Y. Пусть ℓ_1, ℓ_2, $\dots \ell_{k-2}$ — вершины L. Выберем цвет $b \in A$, не совпадающий ни с одним из цветов $f_{\ell_1}(Y)$, $\dots$, $f_{\ell_{k-2}}(Y)$. Тогда для раскраски шляп (w_b, Y) ни один мудрец не угадает цвет правильно.

3.5. [1, Пример 4] Ответ: два мудреца могут угадать свой цвет правильно.

4.1. Выпишем тождество аналогичное (1) и с его помощью назначим линейные функции, задающие ответы мудрецов. Чтобы не выписывать тождество детально (оно очень громоздкое), нам понадобится предварительная работа.

Под N-мерным гиперкубом Q_N мы понимаем граф, содержащий 2^N вершин, которые пронумерованы двоичными N-значными числами, а ребрами соединены вершины, номера которых отличаются лишь в одном двоичном разряде. Приводимые ниже конструкции можно выполнить для любого гиперкуба, но к задаче о мудрецах они применимы лишь при $N \equiv 2 \pmod 3$.

Лемма. На ребрах гиперкуба Q_N можно так ввести ориентацию, что каждый 4-цикл в Q_N будет содержать 3 ребра, указывающих на одно из направлений обхода цикла, и 1 ребро, указывающее в другом направлении.

Доказательство. Индукция по N. База $N = 2$. 

Индукционный переход. Пусть ориентация на графе Q_N уже задана. Мы можем считать, что граф Q_{n+1} состоит из двух копий графа Q_N — «левой» и «правой» — и из каждой вершины левой копии ведет ребро в соответственную вершину правой копии. Пусть в левой копии все ребра ориентированы в соответствии с индукционным предположением, а в правой копии введем противоположную ориентацию. Наконец, на ребрах, ведущих из левой копии в правую, зададим направление слева направо. Нетрудно видеть, что эта ориентация удовлетворяет требованиям. □

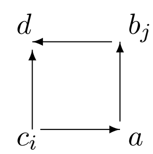
Каждую вершину графа отождествим с какой-нибудь независимой переменной.

Напомним, что в графе Q_N все вершины имеют степень N. Пусть a — произвольная вершина графа; b_1, b_2, $\ldots$ — вершины, в которые из a выходит ребро; c_1, c_2, $\ldots$ — вершины, из которых в a ведет ребро. Для каждой вершины a графа Q_N рассмотрим выражение f_a, равное квадрату линейной комбинации

$$f_a = (a + b_1 + b_2 + \ldots - c_1 - c_2 - \ldots)^2. \tag{5}$$

Рассмотрим сумму $\sum f_a$ этих квадратов по всем вершинам графа. Раскроем все скобки. Для каждой вершины a слагаемые вида a^2 будут присутствовать в этой сумме с кратностью $N+1$, поскольку каждое такое слагаемое появляется при раскрытии скобок f_a, f_{b_1}, f_{b_2}, $\ldots$, f_{c_1}, f_{c_2}, $\ldots$ и только в них. Далее, каждому ребру ab соответствует слагаемое $+2ab$, появляющееся при раскрытии скобки в выражении f_a, а также слагаемое $-2ab$, появляющееся при раскрытии скобки в выражении f_b. При раскрытии других скобок такие слагаемые появиться не могут, поэтому все они сокращаются.

Кроме таких слагаемых, при раскрытии скобок f_a появляются слагаемые вида $-2b_jc_i$ — разберемся с ними подробнее. Пусть a имеет номер 00, b_j — номер 01, c_i — номер 10. Рассмотрим также вершину d с номером 11 (ограничимся выписыванием тех битов, где у номеров есть различия). Очевидно, $f_d = (d - b_j - c_i + \ldots)^2$, поэтому при раскрытии скобки f_d слагаемое $2b_jc_i$ присутствует со знаком «+». В результате оно сократится. Аналогично рассматриваются другие соответствующие лемме возможные ориентации ребер в цикле.



Итак, $\sum_a f_a = (N+1) \cdot \sum_a a^2$.

Вернемся к задаче о мудрецах. Пусть $N \equiv 2 \pmod 3$. В этом случае сумма $\sum_a f_a$ делится на 3. При этом она состоит из 2^N слагаемых. Очевидно, $f_a \equiv 0$ или $1 \pmod 3$. Поэтому хотя бы одно из слагаемых f_a должно быть нулевым по модулю 3 (а при нечетных N — даже два слагаемых). Для каждой вершины a в обозначениях формулы (5) потребуем, чтобы мудрец, находящийся в этой вершине, в качестве своей гипотезы назвал значение выражения $c_1 + c_2 + \ldots - b_1 - b_2 - \ldots$. Тогда мудрец, находящийся в вершине a, для которой $f_a \equiv 0 \pmod 3$, угадает цвет своей шляпы.

4.2. [1, лемма 11] Будем пользоваться гиперкубом для описания стратегий (см. текст перед условием задачи).

Разобьем гиперкуб на слои: к i-му слою отнесем все вершины, у которых сумма координат равна i. Количество (неориентированных) ребер, выходящих из некоторой v вершины к вершинам следующего слоя, будем называть *верхней степенью* этой вершины $\operatorname{udeg} v$, а число ребер, выходящих к вершинам предыдущего слоя, — *нижней степенью* вершины $\operatorname{ddeg} v$.

Рассмотрим ребро между i-м и $(i+1)$-м слоями и соответствующего мудреца (=меняющуюся координату), у вершины в $(i+1)$-м слое эта координата равна 1, а в i-м слое — 0. Стратегия задает ориентацию на ребре. Если это ребро ориентировано от i-го слоя к $(i+1)$-му, то мудрец угадает, когда на нем шляпа цвета 1, и не угадает в противном случае. Если же ребро ориентировано от $(i+1)$-го слоя к i-му, то мудрец угадает, когда на нем шляпа цвета 0, и не угадает в противном случае. Нетрудно видеть, что мы заведомо получим сбалансированную стратегию, если для каждой вершины v из i-го слоя, число приходящих в нее ребер из $(i+1)$-го слоя будет равно $[\operatorname{udeg} v/2]$, а число приходящих в нее ребер из $(i-1)$-го слоя будет равно $[\operatorname{ddeg} v/2]$.

Построим сбалансированную стратегию, т. е. введем ориентации на ребрах таким образом, чтобы были выполнены свойства верхних и нижних степеней, упомянутые выше. Идея проста: возьмем произвольное ребро, расположенное между i-м и $(i+1)$-м слоями, ориентируем его как-нибудь и будем строить ориентированный путь, добавляя новые ребра так, чтобы путь все время оставался между i-м и $(i+1)$-м слоями. Если путь невозможно продолжить (ни вперед, ни назад) и мы ориентировали еще не все ребра, начнем строить следующий путь, и т. д. Когда все ребра будут ориентированы, получится сбалансированная стратегия.

4.3. [1, Предложение 13] Когда количество мудрецов четно, оптимальная стратегия характеризуется тем, что у каждой вершины гиперкуба одинаковы входящая и выходящая степени. В этом случае на гиперкубе можно построить ориентированный Эйлеров путь. Стратегия i-го мудреца — это ориентация ребер, параллельных одному направлению (i-му орту). Половина вершин гиперкуба находится при этом в (левой) грани $x_i = 0$, а другая половина — в правой грани $x_i = 1$. При стрелки, направленные влево, соответствуют случаю, когда мудрец назвал 0, а стрелки, направленные вправо, это когда мудрец назвал 1. Эйлеров путь содержит поровну тех и других стрелок.

Литература

[1] *Butler S., Hajiaghayi M., Kleinberg R., Leighton T.* Hat Guessing Games

[2] *Do N.* Communicating with eyes, hats and light bulbs

[3] *Fiege U.* You can leave your hat on (if you guess its color).

[4] *Gadouleau M., Georgiou N.* New constructions and bounds for Winkler's hat game `http://arxiv.org/pdf/math/1311.2022v1.pdf`

[5] *Krzywkowski M.* Hat problem on a graph. Ph.D. dissertation, University of Exeter, 2012.

[6] *Paterson M., Stinson D.* Yet another hat game // The electronic journal of combinatorics. Vol. 17. 2010. # R86

[7] *Szczechla W.* The three-colour hat guessing game on the cycle graphs // arXiv:1412.3435v2