Инциденции точек и прямых.

Ф. Нилов, А. Полянский, Н. Полянский

Рис. 1: Пал Эрдёш

Жил-был дедушка Эрдёш. Придумывал он много задачек. Так вот однажды он загадал такую загадку.

Пусть на плоскости живет некоторое конечное множество прямых $\mathcal{L}$ и некоторое конечное множество точек P. Тогда через $I(\mathcal{L}, P)$ будем обозначать количество инциденций между этими множествами, то есть число таких пар (l, p), $l \in \mathcal{L}$, $p \in P$, что $p \in l$.

Обозначим за $I(n,m)$ максимальное значение $I(\mathcal{L}, P)$ среди всех таких пар $(\mathcal{L}, P)$, что $|\mathcal{L}| = n$, $|P| = m$, здесь и далее через $|A|$ обозначаем количество элементов в множестве A.

Вопрос: Получить точную оценку сверху для $I(n, m)$.

П. Эрдёш предположил: существует такая константа C, что

$$I(n, n) \leqslant C\left(n^{4/3}\right).$$

Очевидно, что эта оценка лучше тривиальной $I(n, n) \leqslant n^2$.

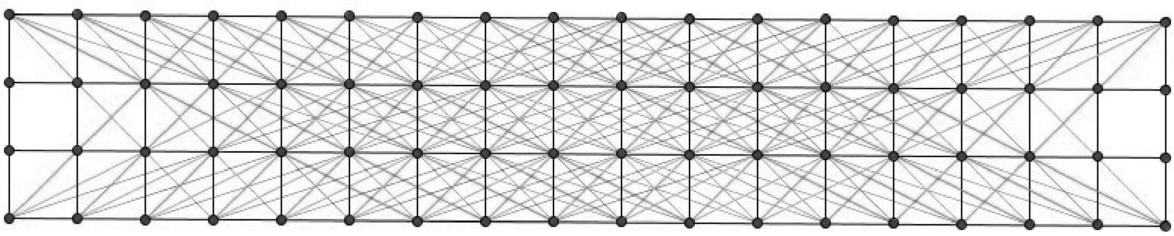

Рис. 2: Точки и прямые с большим числом инцидеций

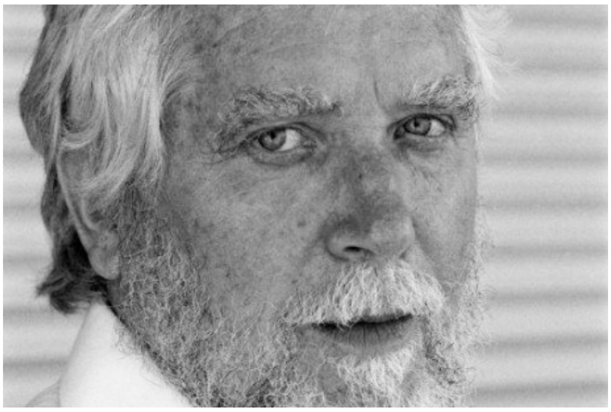

Рис. 3: Эндре Семереди

Рис. 4: Уильям Т. Троттер

В 1983 году два математика, Семереди и Троттер, доказали последнюю оценку. Этот факт известен как **теорема Семереди-Троттера**.

Наша основная цель — доказать эту теорему двумя способами. Попутно мы решим много интересных задач в геометрии и комбинаторике.

1 Комбинаторная часть

1.1 Введение. Комбинаторная геометрия

1.1. На плоскости расположено конечное количество точек. Докажите, что найдётся такая прямая, что в каждой из полуплоскостей, на которые она делит плоскость, будет не больше половины от всех точек (полуплоскость не содержит свою границу).

1.2. Пусть на плоскости дано $2n$ точек. Докажите, что их можно разделить на пары так, что отрезки, соответствующие парам, не будут пересекаться.

1.3. Дано n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Между некоторыми из точек проведены отрезки. Назовём набор отрезков между точками *связным*, если между любыми двумя точками найдётся путь по отрезкам из этого набора. Построен такой связный набор Γ, что сумма длин отрезков в Γ не больше, чем в любом другом связном наборе. Докажите, что отрезки из Γ пересекаются только концами.

1.4. Пусть на плоскости даны n точек и n непараллельных прямых. Докажите, что можно пронумеровать точки и прямые числами от 1 до n так, чтобы отрезки перпендикуляров, опущенных из соответствующих точек на соответствующие прямые не пересекались.

1.5. Дан невыпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Если несмежные вершины A_i и A_j многоугольника таковы, что он лежит целиком по одну сторону от прямой A_iA_j, то можно взять одну из двух ломаных, на которые точки A_i и A_j его разбивают, и отразить симметрично относительно центра отрезка A_iA_j. Докажите, что рано или поздно многоугольник станет выпуклым.

1.2 Инциденции множеств

1.6. Пусть $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ – произвольная совокупность трёхэлементных подмножеств n-элементного множества, причём $|M_i \cap M_j| \neq 1$ для любых i, j. Найдите максимальное значение s, при котором это возможно.

1.7. Пусть $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — произвольная совокупность, состоящая из четырёхэлементных подмножеств n-элементного множества, причём $|M_i \cap M_j| \neq 2$ для любых i, j. Докажите, что максимальное s, при котором это возможно, лежит в пределах от $\lfloor n/4 \rfloor^2$ до $n(n-1)/4$.

Определение. Пусть $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_n\}$ – произвольная совокупность подмножеств m- элементного множества $P = \{p_1, \ldots p_m\}$. Назовём пару (l_i, p_k) *инциденцией,* если $p_k \in l_i$. Тогда через $I(\mathcal{L}, P)$ будем обозначать число инциденций, образованных элементами из $\mathcal{L}$ и P, а через $I(n, m)$ максимальное значение $I(\mathcal{L}, P)$ по всем таким множествам $\mathcal{L}$ и P, что $|\mathcal{L}| = n, |P| = m$.

Один из важных вопросов всего проекта состоит в том, чтобы оценить число инциденций в случае, когда даны какие-то условия на множества. Если нет никаких условий на множества, то можем получить лишь тривиальную оценку $I(\mathcal{L}, P) \leqslant mn$.

Есть следующий способ воспринимать инциденции:

Рассмотрим пустую табличку, состоящую из n строчек и m столбцов. Строки будут соответствовать элементам множества $\{l_1, \ldots, l_n\}$, а столбцы — элементы $\{p_1, \ldots p_m\}$. Тогда мы будем ставить на позицию, находящуюся на пересечении i-ой строчки, и j-го столбца, звездочку тогда и только тогда, когда $p_j \in l_i$. Вопрос о числе инциденций можно теперь поставить так: сколько звездочек стоит в таблице?

Если вам это будет удобно, то переводите задачи на язык табличек (см. задачу **1.11.**).

В оставшихся задачах этого параграфа мы считаем, что $n, m, r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_n\}$ – произвольная совокупность подмножеств m- элементного множества $P = \{p_1, \ldots p_m\}$, причем $|l_i \cap l_j| \leqslant r$ для любых $i \neq j$.

1.8. Пусть $r = 1$. Докажите, что

а) $I(\mathcal{L}, P) \leqslant n^2 + m$, $I(\mathcal{L}, P) \leqslant m^2 + n$.

б) $I(\mathcal{L}, P) \leqslant \sqrt{m(n^2 - n)} + m$, $I(n, m) \leqslant \sqrt{n(m^2 - m)} + n$.

1.9. Докажите, что

$$I(\mathcal{L}, P) \leqslant \sqrt{mr(n^2 - n)} + m.$$

1.10. Пусть $r = 1$.

(a) Найдите $\max I(\mathcal{L}, P)$ при $n \leqslant 3$.

(b) Найдите $\max I(\mathcal{L}, P)$ при $m \geqslant C_n^2$. При каких условиях достигается этот максимум?

1.11. Квадрат 13×13 разбит на единичные квадратики. Центры некоторых из них отмечены так, что нет прямоугольника с вершинами в отмеченных точках и сторонами, параллельными сторонам квадрата. Найдите наибольшее возможное число отмеченных точек.

1.12. 100 (a) мышей вместе грызут 1000 (b) кусков сыра. Каждая мышь может попробовать несколько кусков сыра, сделав в каждом из них по одной дырке. Любые две мыши имеют дырки не более чем в 10 (c) общих кусках сыра. Докажите, что число дырок не больше 11000 ($b + a\sqrt{bc}$). Докажите, что число дырок не больше 10500 $\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4bca(a-1)}}{2}\right)$.

1.3 Теорема о сэндвиче.

1.13. Докажите, что если на плоскости даны красные и синие точки в общем положении, то найдётся прямая, которая будет делить плоскость на две такие полуплоскости, что в каждой из них будет находиться не более половины красных и не более половины синих точек.

1.14. Докажите, что если в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны красные, синие и зелёные точки в общем положении, то найдётся плоскость, которая будет делить $\mathbb{R}^3$ на два такие полупространства, что в каждом из них будет находиться не более половины точек каждого цвета.

1.15. Пусть на плоскости дано $2m$ точек общего положения, из них m красных и m синих. Докажите, что их можно разделить на пары так, что точки в каждой паре разного цвета и отрезки, соответствующие парам, не будут пересекаться.

Будем обозначать прямую через $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, плоскость — через $\mathbb{R}^2$, а трёхмерное пространство — через $\mathbb{R}^3$. Проще всего воспринимать эти объекты следующим образом: $\mathbb{R}$ — это множество всевозможных вещественных (действительных) чисел, $\mathbb{R}^2$ — это множество всех пар $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}^3$ — множество всех троек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где $_1, _2, x_3 \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется и $\mathbb{R}^n$. Элементами $\mathbb{R}^n$ являются векторы (точки) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = l,...,n$ (x_i — координаты).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_d$ — некоторые действительные числа, не равные одновременно нулю, а a_0 — произвольное действительное число. Назовём *гиперплоскостью* в пространстве $\mathbb{R}^d$ множество таких точек $\mathbf{x}$, что $\sum\limits_{i=1}^{d} a_i x_i = a_0$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – координаты $\mathbf{x}$.

Контрольный вопрос. Что такое гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$?

Теорема о сэндвиче. Множества $A_1, \ldots, A_d \in \mathbb{R}^d$ — конечные. Тогда существует такая гиперплоскость l, что в каждом из полупространств, образованных данной гиперплоскостью, будет не более $\lfloor A_i/2 \rfloor$ точек из A_i (некоторые точки могли лежать в гиперплоскости).

Если в случае $d = 3$ заменить множества A_1, A_2, A_3 на хлеб, сыр и ветчину, то будет существовать такой разрез ножем (плоскость), что в каждом из полученных полупространств будет одинаковое количество каждого из ингридиентов.

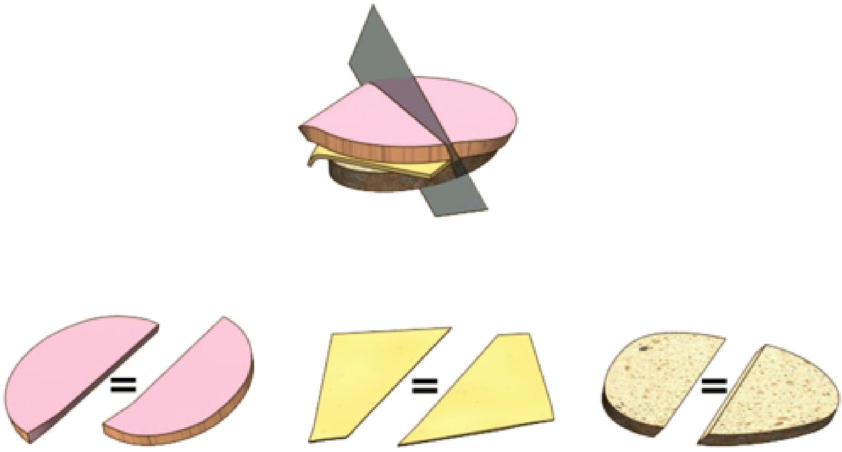

Рис. 5: Разрез сэндвича

1.16. Пусть в пространстве дано $3n$ точек общего положения, из них n красных, n синих и n зелёных. Докажите, что их можно разделить на тройки так, что точки в каждой тройке разного цвета и треугольники, соответствующие тройкам, не будут пересекаться.

1.17.* Два вора украли ожерелье с двумя концами, состоящее из платиновой цепочки, на которую нанизаны драгоценные камни d видов. Они не знают ценности каждого камня, поэтому хотят поделить камни каждого вида поровну (известно, что камней каждого вида четное количество). Чтобы потерять как можно меньше платины, воры хотят сделать наименьшее число разрезов. Могут ли они поделить ожерелье с помощью

а) $(d-1)$ разрезов?

б) d разрезов?

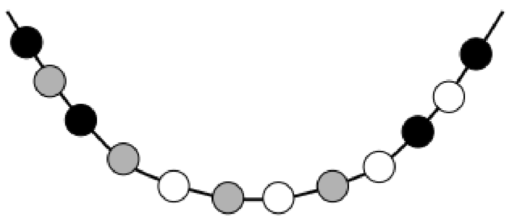

Рис. 6: Для данного ожерелья достаточно 3 разрезов

2 Конструктивная геометрия

Мы будем говорить, что n точек и n прямых на плоскости образуют *конфигурацию* n_d из точек и прямых, если на любой данной прямой лежит ровно d данных точек и через любую данную точку проходит ровно d данных прямых. Т.е. число инциденций будет равно nd.

2.1. Постройте пример конфигурации 9_3.

(*Подсказка*: используйте известную геометрическую теорему)

2.2.Постройте пример конфигурации 9_3, отличной от той, что возникла в 2.1.

2.3. Постройте пример конфигурации 10_3.

(*Подсказка*: используйте известную геометрическую теорему)

2.4. Постройте пример конфигурации 10_3, отличной от той, что возникла в 2.3.

2.5.* Докажите, что найдется такая константа C, что для любого N найдутся такие $n > N$ прямых и $n > N$ точек, что число инциденций задаваемое этими наборами прямых и точек на плоскости больше, чем $Cn^{4/3}$.

Подсказка (после промежуточного финиша). Обратите внимание на картинку на первой странице.

3 Алгебраические мотивы в геометрии

Под записью $g(x) = O(f(x))$ будем подразумевать, что существует такая постоянная $C > 0$, что $|g(x)| \leqslant Cf(x)$ выполняется при любом x.

Дан многочлен $f(x, y)$. *Множеством нулей* Z_f многочлена $f(x, y)$ называется множесто всех точек (x, y), для которых $f(x, y) = 0$. Назовем степенью многочлена число равное наибольшему значению $i + j$ среди всех мономов вида $x^i y^j$ с ненулевым коэффициентом. Степень многочлена $f(x, y)$ будем обозначать через $\deg f$.

3.1. Дан многочлен $f(x, y)$ степени d и произвольная прямая l. Докажите, что либо прямая l пересекает множество Z_f не более, чем по d точкам, либо прямая l целиком содержится в множестве Z_f.

3.2. Дан многочлен $f(x, y)$ степени d. Докажите, что число прямых которые содержатся в множестве Z_f не превосходит d.

3.3. Покажите, что количество мономов степени не выше d от двух переменных ровно $\binom{d+2}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$.

Многочлен $f(x; y)$ будем называть r**-делящим** (где $r > 1$) для данного конечного множества точек $A \subset \mathbb{R}$ (где $|A| = n$), если в каждой компоненте связанности множества $R^2 \setminus Z_f$ будет содержаться не более n/r точек из A.

3.4. Докажите, что для данного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ (где $|A| = n$) существует многочлен степени $[r]$, который будет r-делящим.

Определение. Пусть d — произвольное натуральное число, а $D = \binom{d+2}{2} - 1$. *Отображением Веронезе степени* d назовем отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^D$, заданное следующей формулой:

$$\varphi(x,y) := (x^i y^j)_{(i,j)|1 \leqslant i+j \leqslant d} \in \mathbb{R}^D.$$

(Каждой координате в $\mathbb{R}^D$ соответствует пара (i, j), для которой выполняется неравенство $1 \leqslant i + j \leqslant d$.)

Заметим, что с помощью применения отображения Веронезе степени 2 можно показать, что для любых пяти точек, среди которых нет четырех, лежащих на одной прямой, существует единственная коника, проходящая через эти точки (коникой называется множество нулей многочлена от двух переменных степени 2). Для этого необходимо провести гиперплоскость через образы данных пяти точек (в нашем случае D=5 и можно показать, что через пять образов точек можно провести единственную гиперплоскость) при отображении Веронезе и рассмотреть конику, уравнение которой имеет те же коэффициенты, что и данная гиперплоскость.

3.5. Даны конечные множества $A_1, \ldots, A_m$. Докажите, что существует многочлен степени не выше k, где $\binom{k+2}{2} - 1 \geqslant m$, который будет 2-делящим многочленом для каждого из данных множеств.

3.6. Докажите, что для данного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ (где $|A| = n$) существует многочлен степени не выше с$\sqrt{r}$, который будет r-делящим (например, можно показать, что $c < 7$)

4 Первое доказательство теоремы Семереди-Троттера

4.1. Докажите, что $I(m,n)=I(n,m)$.

Далее будем считать, что $|L|=|P|=n$. Построим r-делящий многочлен $f(x,y)$ для данного множества точек P.

Обозначим через $L_0\subset L$ множество прямых $l\in L$, $Z_l\subset Z_f$, а через $P_0\subset P$ множество точек $p\in P\cap Z_f$. Пусть многочлен f поделил плоскость на s частей: точки в i-ой части будем обозначать через P_i, а прямые который пересекают i-ую часть через L_i.

4.2. Докажите, что существуют такие константы c_1,c_2,c_3, что

а) $I(L_0,P_0)\leqslant c_1n\sqrt{r}$;

б) $I(L\setminus L_0,P_0)\leqslant c_2n\sqrt{r}$;

в) $\sum\limits_{i=1}^{s} I(L_i,P_i)\leqslant c_3n^2/r$.

4.3. Выбрав нужное r, докажите теорему Семереди-Троттера.

4.4. Докажите теорему Семереди-Троттера в общем случае:

Теорема Семереди-Троттера. $I(n,m)=O((nm)^{2/3}+n+m)$.

Для этого нужно получить оценки, аналогичные тем, что были получены в задаче 4.2.

5 Применение теоремы Семереди-Троттера

5.1. а) Докажите, что число прямых, что каждая из которых содержит по крайней мере k различных точек m-элементного множества P, равно $O(m^2/k^3 + m/k)$.
б) Докажите, что такие прямые задают $O(m^2/k^2 + m)$ инциденций с данным множеством точек P.

5.2. (*Теорема Бека*) Пусть P — множество точек на плоскости, а L — множество прямых, образованных по крайней мере двумя точками из P. Тогда найдутся такие константы $c_1, c_2 > 0$, что выполняется одно из двух условий:

1. Найдется прямая из L, которая содержит по крайней мере $c_1|P|$ точек.
2. $|L| \geqslant c_2|P|^2$.

5.3. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — конечное множество. Тогда существует $c > 0$ такое, что

$$\max\{|A + A|; |A \cdot A|\} \geqslant c|A|^{5/4}.$$

Здесь

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A, a_2 \in A\}, A \cdot A = \{a_1 \cdot a_2 : a_1 \in A, a_2 \in A\}.$$