

Комбинаторная геометрия и раскраски графов: от алгебры к вероятности

А.М. Райгородский, а также В. Буланкин и А. Гусев

1 Определения и обозначения

Один из самых известных и ярких объектов в комбинаторной геометрии — это *хроматическое число пространства*. Прежде чем ввести его, напомним, что пространство \mathbb{R}^n , называемое *n-мерным евклидовым пространством*, — это просто множество всех “точек” \mathbf{x} , каждая из которых есть последовательность, состоящая из n действительных чисел: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. При этом между любыми двумя точками $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ можно померить расстояние по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

В частности, при $n = 1$ получаем обычную прямую, при $n = 2$ — обычную плоскость, при $n = 3$ — обычное пространство.

Так вот, хроматическое число \mathbb{R}^n — это величина, обозначаемая $\chi(\mathbb{R}^n)$ и равная минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки пространства \mathbb{R}^n , чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1.

Нам предстоит пройти довольно большой путь от простейших фактов, которые известны многим, хотя и не всем, до весьма продвинутых результатов, полученных буквально в последние месяцы перед ЛКТГ. И методы, которые нам предстоит узнать, будут разнообразны и нетривиальны — от линейной алгебры до теории вероятностей и случайных графов!

2 Задачи до промежуточного финиша

2.1 Простейшие оценки хроматического числа

Задача 1. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$.

Задача 2. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$.

Задача 3. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

Задача 4. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 27$.

Задача 5. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$.

Задача 6. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n)$ конечно при любом n .

Задача 7*. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (\lceil \sqrt{n} \rceil + 1)^n$.

Задача 8. Докажите, что в \mathbb{R}^n есть множество из $n + 1$ точек, попарные расстояния между которыми равны 1, а стало быть, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 1$.

Задача 9*. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$.

2.2 Дистанционные графы специального вида, их простейшие свойства и связь с хроматическим числом пространства

Напомним, что скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ в \mathbb{R}^n — это выражение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Нетрудно проверить, что всегда

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1)$$

Пусть даны натуральные числа r, s . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $G(n, r, s)$ граф, у которого множество вершин — это

$$V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = r\},$$

а множество ребер — это

$$E(n, r, s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s\}.$$

Иными словами, вершины — это все возможные векторы из нулей и единиц, в каждом из которых ровно r единиц и $n - r$ нулей, а ребрами соединены те и только те пары вершин, скалярное произведение которых равно s . За счет формулы (1) можно сказать, что ребра — это те и только те пары вершин, расстояние между которыми равно $\sqrt{2r - 2s}$. Именно поэтому графы $G(n, r, s)$ называются *дистанционными*. Удобно также иметь следующую интерпретацию графа $G(n, r, s)$. Его вершинами можно считать все возможные r -элементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а ребрами — пары подмножеств, мощность пересечения которых равна s . Осознайте это!

Напомним, что *независимое множество* вершин графа — это множество, в котором любые две вершины не соединены ребром. *Число независимости* $\alpha(G)$ графа G — это количество вершин в любом его максимальном по мощности независимом множестве. *Хроматическое число* $\chi(G)$ графа G — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы между вершинами одного цвета не было ребер.

Задача 10. Докажите, что для любых n, r, s выполнено $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G(n, r, s))$.

Задача 11. Докажите, что для любого графа $G = (V, E)$ выполнено $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Задача 12. Найдите $\alpha(G(n, 3, 1))$. Выведите из полученного результата значительное усиление оценки из задачи 9.

Задача 13*. Найдите $\chi(G(n, 3, 1))$ при $n = 2^k$. **Указание.** Воспользуйтесь задачами 11 и 12, а также следующей леммой и индукцией по k .

Лемма 1. Пусть n — четное число и P_n — множество всех неупорядоченных пар $\{a, b\}$ натуральных чисел, не превосходящих n . Тогда найдутся такие множества пар B_1, \dots, B_{n-1} , что

$$P_n = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_{n-1},$$

при этом для любого $i = 1, \dots, n - 1$ никакие две пары из B_i не содержат общий элемент. Для нечетного n верно разложение

$$P_n = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n,$$

и также для любого $i = 1, \dots, n$ никакие две пары из B_i не содержат общий элемент.

Задача 14.** Найдите как можно более точные оценки (в идеале — формулу) для $\chi(G(n, 3, 1))$ при любых n .

Задача 15. Докажите, что $\alpha(G(n, r, s)) \geq C_{n-s-1}^{r-s-1}$.

Задача 16*. Докажите, что $\alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$, если $2r \leq n$.

Задача 17. Докажите, что $\chi(G(n, r, 0)) \leq n - 2r + 2$, если $2r \leq n$.

Задача 18. Докажите, что $\chi(G(n, r, s)) \leq C_r^s C_{n-r}^{r-s} + 1$.

Задача 19. Докажите, что $\chi(G(n, r, s)) \leq C_n^{s+1}$.

Задача 20*. Пусть $k = \left[\frac{r-1}{s} \right]$. Докажите, что $\chi(G(n, r, s)) \leq k \cdot C_{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil}^{s+1}$.

Задача 21*. Докажите, что $n - r + 1 \leq \chi(G(n, r, r-1)) \leq n$ при $n = 2^k$. **Указание.** Воспользуйтесь леммой 1 и индукцией по r и k .

Задача 22.** Найдите $\chi(G(n, r, r-1))$ или хотя бы уточните оценки из задачи 21.

Убедитесь в том, что ни один из полученных Вами результатов не позволяет улучшить нижние оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, найденные в задачах 9, 12. Ввиду задачи 11 хорошо бы научиться делать верхние оценки чисел независимости графов $G(n, r, s)$. Оказывается, многие из них получаются с помощью линейно-алгебраического метода. Поэтому в следующем разделе мы напоминаем базовые понятия линейной алгебры.

2.3 Основы линейной алгебры и ее применения

Скажем, что векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$ в \mathbb{R}^n линейно независимы, если равенство $c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_t\mathbf{x}_t = 0$ возможно лишь при условии, что $c_1 = \dots = c_t = 0$.

Задача 23. Докажите, что максимальное число линейно независимых векторов в \mathbb{R}^n равно n .

Задача 24. Докажите, что если $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ — любая максимальная система линейно независимых векторов в \mathbb{R}^n , то любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$, где c_1, \dots, c_n — действительные числа. (Система $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ называется базисом пространства, а выражение $c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$ — линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ с коэффициентами c_1, \dots, c_n . В этих терминах любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса.)

Пусть p — простое число, а \mathbb{Z}_p — множество вычетов по модулю p . Пространство \mathbb{Z}_p^n , подобно пространству \mathbb{R}^n , — это просто множество всех последовательностей чисел из \mathbb{Z}_p . Операции сложения “векторов” $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_p^n$ и умножения их на элементы \mathbb{Z}_p осуществляются, как обычно, — покоординатно, — но при этом каждая координата берется по модулю p .

Понятия линейной независимости, линейной комбинации и базиса для \mathbb{Z}_p^n определяются так же, как для \mathbb{R}^n . Только в них все числа c_i — это элементы \mathbb{Z}_p — не \mathbb{R} , — а равенство нулю понимается как равенство нулю по модулю p .

Задача 25. Докажите, что максимальное число линейно независимых векторов в \mathbb{Z}_p^n равно n и что любая максимальная система образует базис.

Задача 26. Пусть $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t\}$ — любое независимое множество вершин графа $G(n, 3, 1)$. Докажите, что векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$ линейно независимы в \mathbb{Z}_2^n , откуда $\alpha(G(n, 3, 1)) \leq n$ и это лишь чуть-чуть слабее результата задачи 12!

Пусть $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}_p\}$. Пусть x_1, \dots, x_n — “переменные”. Одночленом от этих n переменных называется выражение вида $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, где a_1, \dots, a_n — некоторые неотрицательные целые числа. Многочлен — это любая линейная комбинация одночленов. При этом многочлен P принадлежит $F[x_1, \dots, x_n]$, если коэффициенты в нем — это элементы F . Складывают и умножают многочлены по обычным правилам. Также, если $P \in F[x_1, \dots, x_n]$, то его можно умножить на любой элемент F . В любом случае правила сложения и умножения коэффициентов многочленов определяются правилами сложения и умножения чисел в множестве F . Степень одночлена — это сумма степеней переменных, входящих в него. Степень многочлена — это максимум степеней его одночленов. Многочлен $P \in F[x_1, \dots, x_n]$ равен нулю, если все его коэффициенты равны нулю в F . Многочлены $P_1 \in F[x_1, \dots, x_n], \dots, P_t \in F[x_1, \dots, x_n]$ линейно независимы над F , если $c_1 P_1 + \dots + c_t P_t = 0$ лишь в случае, когда все числа $c_1 \in F, \dots, c_t \in F$ равны нулю в F . Очевидно, что любой многочлен порождается базисом, состоящим из одночленов.

Задача 27. Докажите, что если многочлены линейно независимы над своим F , то их количество не превосходит числа одночленов в базисе, которым все эти многочлены порождаются.

Задача 28. Пусть $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t\}$ — любое независимое множество вершин графа $G(n, 5, 2)$. Пусть многочлены $P_1 \in \mathbb{Z}_3[y_1, \dots, y_n], P_2 \in \mathbb{Z}_3[y_1, \dots, y_n], \dots, P_t \in \mathbb{Z}_3[y_1, \dots, y_n]$ задаются формулами

$$P_i(\mathbf{y}) = P_i(y_1, \dots, y_n) = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y})((\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) - 1), \quad i = 1, \dots, t.$$

Например, если $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, \dots, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$, то

$$P_1(y_1, \dots, y_n) = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 1) = y_1^2 + \dots + y_5^2 + 2y_1 y_2 + \dots + 2y_4 y_5 - y_1 - \dots - y_5,$$

$$\begin{aligned} P_2(y_1, \dots, y_n) &= (y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n)(y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n - 1) = \\ &= y_{n-4}^2 + \dots + y_n^2 + 2y_{n-4} y_{n-3} + \dots + 2y_{n-1} y_n - y_{n-4} - \dots - y_n. \end{aligned}$$

Докажите, что многочлены P_1, \dots, P_t линейно независимы над \mathbb{Z}_3 , а стало быть, $\alpha(G(n, 5, 2)) \leq C_n^2 + 2C_n^1$.

Задача 29. Пусть в условиях предыдущей задачи многочлены P_i заменены многочленами P'_i по следующему правилу: каждый одночлен вида y_i^2 преобразован к виду y_i , после чего приведены подобные слагаемые. Докажите, что многочлены P'_1, \dots, P'_t , отвечающие векторам из независимого множества вершин W графа $G(n, 5, 2)$, так же линейно независимы над \mathbb{Z}_3 , как и исходные многочлены P_1, \dots, P_t . Выведите из этого факта оценку $\alpha(G(n, 5, 2)) \leq C_n^2$ и сравните ее с оценкой из задачи 15.

Задача 30. Выведите из результата предыдущей задачи нижнюю оценку для $\chi(\mathbb{R}^n)$, которая значительно уточняет оценку из задачи 12. Убедитесь в том, однако, что ввиду задачи 19 существенных дальнейших продвижений за счет графа $G(n, 5, 2)$ мы не получим.

Задача 31. Пусть $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t\}$ — любое независимое множество вершин графа $G(n, 9, 4)$. Пусть многочлены $P_1 \in \mathbb{Z}_5[y_1, \dots, y_n]$, $P_2 \in \mathbb{Z}_5[y_1, \dots, y_n]$, \dots , $P_t \in \mathbb{Z}_5[y_1, \dots, y_n]$ задаются формулами

$$P_i(\mathbf{y}) = P_i(y_1, \dots, y_n) = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y})((\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) - 1)((\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) - 2)((\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) - 3), \quad i = 1, \dots, t.$$

Докажите, что многочлены P_1, \dots, P_t линейно независимы над \mathbb{Z}_5 .

Задача 32. Какая верхняя оценка для $\alpha(G(n, 9, 4))$ вытекает из предыдущей задачи?

Задача 33. Пусть в условиях задачи 31 многочлены P_i заменены многочленами P'_i по следующему правилу: каждый одночлен в них, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, конечно, имеет вид $y_1^{a_1} \cdot \dots \cdot y_n^{a_n}$; если среди чисел a_i есть большие либо равные двойке, то заменяем все их единицами, после чего приводим подобные слагаемые. Например, одночлен $y_1^2 y_2^2$ превратится в $y_1 y_2$, и то же самое будет с одночленами $y_1^2 y_2$, $y_1 y_2$, и т.д. Докажите, что многочлены P'_1, \dots, P'_t , отвечающие векторам из независимого множества вершин W графа $G(n, 9, 4)$, так же линейно независимы над \mathbb{Z}_5 , как и исходные многочлены P_1, \dots, P_t . Выведите из этого факта оценку $\alpha(G(n, 9, 4)) \leq C_n^4 + C_n^3 + C_n^2 + C_n^1 + C_n^0$ и сравните ее с оценкой из задачи 15.

Задача 34. Выведите из результата предыдущей задачи нижнюю оценку для $\chi(\mathbb{R}^n)$, которая значительно уточняет оценку из задачи 30. Убедитесь в том, однако, что ввиду задачи 19 существенных дальнейших продвижений за счет графа $G(n, 9, 4)$ мы не получим.

Задача 35. Пусть r и s таковы, что $r - s = p$, где p — простое число, причем $r - 2p < 0$. Докажите, что тогда $\alpha(G(n, r, s)) \leq \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k$. Сравните эту оценку с оценкой из задачи 15.

Задача 36*. Исследуйте нижние оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, которые вытекают из результатов предыдущей задачи. Как эти оценки соотносятся с оценками из задачи 19?

3 Задачи после промежуточного финиша

До промежуточного финиша мы убедились в том, насколько важны числа независимости графов для получения нижних оценок хроматического числа пространства. При этом мы рассматривали разные последовательности дистанционных графов — последовательности $\{G(n, r, s)\}_{n=1}^\infty$ с заданными наперед r и s . Интересно понять: а как изменятся числа независимости, если, вместо графов $G(n, r, s)$, брать их “остовные” подграфы, т.е. вершины сохранять, а ребра частично удалять. Кажется очевидным, что числа независимости должны сильно вырасти, коль скоро мы удалим много ребер. Однако, удивительным образом, иногда это так, а иногда и совершенно иначе! Для того, чтобы получить соответствующие результаты, займемся немного случайными графиками и теорией вероятностей.

3.1 Случайный граф Эрдеша–Реньи и некоторые его вероятностные характеристики

Пусть $V_n = \{1, \dots, n\}$ — множество вершин. Теоретически на нем можно построить C_n^2 ребер, если запретить кратные ребра, петли и ориентацию. Давайте каждое из этих C_n^2 потенциальных ребер проводить с вероятностью $p \in [0, 1]$, общей для всех ребер. При этом появляться или не появляться ребра будут независимо друг от друга. Пусть $G = (V_n, E)$ — какой-то граф, который может случайно возникнуть в результате описанной только что вероятностной процедуры. Обозначим вероятность его возникновения $\mathbb{P}(G)$. Понятно, что она равна $p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}$. Если A — какое-то свойство графа, то его вероятность — $\mathbb{P}(A)$ — это сумма по всем графикам G , обладающим свойством A , вероятностей этих графов.

Обозначим Ω_n множество всех графов на вершинах V_n . Любая функция X , определенная на Ω_n и принимающая действительные значения, называется *случайной величиной*. Например, число треугольников в графе или число его связных компонент, или его число независимости — это случайные величины. При этом надо четко понимать, что величины случайны лишь потому, что априори мы не знаем, какой граф появится на свет. Когда график уже возник, значение X определено однозначно!

У случайных величин есть “средние значения” — так называемые *математические ожидания*. Математическое ожидание величины X — это число $\mathbb{M}X$, определяемое по формуле $\mathbb{M}X = \sum_{G \in \Omega_n} X(G)\mathbb{P}(G)$. Мы просто складываем значения функции X на графах, помноженные на вероятности этих графов. Естественно, это некое взвешенное среднее (веса — вероятности) — своего рода центр масс. Давайте научимся считать математические ожидания и применять полученные результаты для изучения свойств случайных графов.

Задача 37. Докажите, что если случайная величина — это константа c , то $\mathbb{M}c = c$.

Задача 38. Пусть X_1, X_2 — случайные величины, а c_1, c_2 — фиксированные числа. Разумеется, $c_1X_1 + c_2X_2$ — это тоже случайная величина. Докажите, что ее математическое ожидание равно $c_1\mathbb{M}X_1 + c_2\mathbb{M}X_2$. Это свойство называется *линейностью* математического ожидания.

Задача 39. С помощью линейности математического ожидания найдите математические ожидания а) числа треугольников в случайном графике; б) числа связных компонент случайного графа, каждая из которых является циклом на k вершинах (k — фиксированное заданное наперед число); в) числа независимых множеств вершин в случайном графике, каждое из которых имеет мощность k (k — фиксированное заданное наперед число).

Задача 40. Докажите *неравенство Маркова*: если X — случайная величина, принимающая неотрицательные значения, и дано положительное число a , то $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{M}X}{a}$.

Задача 41. Докажите с помощью неравенства Маркова, что если $p = \frac{1}{2}$, то $\mathbb{P}(\alpha(G) \leq 2 \log_2 n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ (говорят “почти наверное $\alpha(G) \leq 2 \log_2 n$ ”).

Заметим, что на самом деле при $p = \frac{1}{2}$ почти наверное $\alpha(G) \geq (2 - \varepsilon) \log_2 n$ при сколь угодно малом наперед заданном $\varepsilon > 0$. Точнее, — и это нам понадобится позже, — справедлива

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ при больших n выполнено неравенство

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq (2 - \varepsilon) \log_2 n) > 1 - 2^{-n}.$$

Таким образом, при $p = \frac{1}{2}$ почти наверное число независимости — это примерно $2\log_2 n$. Иными словами, что происходит? Мы берем полный граф на n вершинах и часть его ребер удаляем с вероятностью $\frac{1}{2}$. У типичного графа, который остается в результате этой процедуры, примерно $\frac{C_n^2}{2}$ ребер — вдвое меньше, чем у полного графа. И у типичного же графа число независимости в логарифм раз больше числа независимости исходного полного графа (у него-то оно равно 1). Что ж, ребер вдвое меньше, и число независимости выросло: вполне естественно! Оказывается, что для некоторых $G(n, r, s)$ при случайному удалении ребер имеет место точно такой же “ожидаемый” результат (число независимости возрастает в примерно логарифм от числа вершин раз). Но чудо в том, что так получается не всегда! Для многих $G(n, r, s)$ число независимости вовсе не изменяется! Ниже мы вместе изучим примеры обеих ситуаций.

3.2 Случайные подграфы графа $G(n, 3, 0)$

Пусть $G_{1/2}(n, 3, 0)$ — случайный подграф графа $G(n, 3, 0)$, полученный взаимно независимым удалением ребер из графа $G(n, 3, 0)$, каждого — с вероятностью $1/2$.

Задача 42. Если у Вас получилась задача 16, то вспомните просто, что $\alpha(G(n, 3, 0)) = C_{n-1}^2$. Иначе попробуйте решить этот частный случай той задачи.

В серии следующих ниже задач мы докажем, что почти наверное $\alpha(G_{1/2}(n, 3, 0)) \leq C_{n-1}^2 \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$. Это и есть то самое удивительное явление: никакого роста в логарифм раз нет; если и есть рост, то лишь в такое количество раз, которое само стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$! Можно доказать и гораздо более сильные факты, но это уже совсем трудно, а нам бы суть почувствовать!

В дальнейшем мы будем для краткости опускать целые части у величин, которые должны быть целыми. Например, запись $C_{\log_2 n}^k$ означает, смотря по контексту, что на самом деле речь идет о верхней или нижней целой части числа $\log_2 n$. Ни одна из выкладок от такого округления не пострадает.

Задача 43. Положим $k = C_{n-1}^2 \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$. Считаем, что k целое (ср. замечание перед задачей). Пусть $A \subset V(n, 3)$ — произвольное множество вершин графа $G(n, 3, 0)$, имеющее мощность k . Обозначим $r(A)$ количество ребер графа $G(n, 3, 0)$, оба конца которых попадают в A . Поскольку $|A| = k > \alpha(G(n, 3, 0))$, ясно, что $r(A) > 0$. Пусть X_k — случайная величина, равная числу независимых множеств размера k в графе $G_{1/2}(n, 3, 0)$. Докажите, что

$$\mathbb{M}X_k = \sum_{A \subset V(n, 3): |A|=k} \left(\frac{1}{2}\right)^{r(A)}. \quad (2)$$

Задача 44. Докажите, что наша цель будет достигнута, едва мы докажем, что $\mathbb{M}X_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Ясно, что надо научиться оценивать *снизу* величины $r(A)$. Для каждого A обозначим $B = B(A)$ любое (раз и навсегда избранное) подмножество множества A , которое является независимым в $G(n, 3, 0)$ и имеет максимальную мощность среди всех подобных подмножеств множества A .

Задача 45. Пусть $A \subset V(n, 3)$, $|A| = k$. Пусть $B = B(A)$. Заметим, что $k \approx \frac{n^2}{2}$. Предположим, что $|B|$ значительно меньше k : например, пусть $|B| < n^{1.9}$ (здесь странное число 1.9 взято почти с потолка, лишь бы строго меньше, чем 2). Докажите, что тогда при больших n заведомо выполнено неравенство $r(A) \geq \frac{k^2}{3|B|}$ (при правильном подходе тройку в знаменатели можно “почти” заменить на двойку, но да Бог с ним).

Задача 46. Пусть $A \subset V(n, 3)$, $|A| = k$. Пусть $B = B(A)$. Пусть $|B| > 9n$, а еще лучше (в дополнение к предыдущей задаче), $|B| \geq n^{1.9}$. Докажите, что $r(A) \geq (|B| - 9n)(|A| - |B|)$.

Задача 47. Разбейте сумму (2) на две части: в первой части будут лишь те A , для которых $|B| < n^{1.9}$; во второй — все остальные. К слагаемым в обеих частях примените оценки из соответствующих задач и убедитесь, что вся сумма (2) таки стремится к нулю, и все получилось! На что в выкладках можно было заменить порог $n^{1.9}$?

3.3 Случайные подграфы графа $G(n, 3, 1)$

Пусть $G_{1/2}(n, 3, 1)$ — случайный подграф графа $G(n, 3, 1)$, полученный взаимно независимым удалением ребер из графа $G(n, 3, 1)$, каждого — с вероятностью $1/2$. Казалось бы, все то же, что и с графами $G(n, 3, 0)$. Ах нет!

Вспомним, что $\alpha(G(n, 3, 1)) \approx n$ (см. задачу 12).

Задача 48*. Напишите аналог равенства (2) и докажите аналог оценки из задачи 45. Убедитесь в итоге, что существует $c > 0$, с которым почти наверное $\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) \leq cn \log_2 n$.

Задача 49. Докажите, что в графе $G(n, 3, 1)$ есть примерно $\frac{n}{2}$ полных подграфов, в каждом из которых примерно $\frac{n}{4}$ вершин и каждые два из которых не соединены ребрами.

Задача 50. С помощью предыдущей задачи и теоремы 1 докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ почти наверное $\alpha(G_{1/2}(n, 3, 1)) \geq (1 - \varepsilon)n \log_2 n$.

Таким образом, для $G_{1/2}(n, 3, 1)$, как и для случайного графа Эрдеша–Ренъи, имеем снова увеличение числа независимости в примерно логарифм от числа вершин раз. Такие вот удивительные эффекты!

Задача 51*. Попробуйте улучшить в константу раз результат задачи 50.

3.4 Случайные подграфы графа $G(n, 2, 1)$

Задача 52. Найдите $\alpha(G(n, 2, 1))$.

Задача 53. Пусть $r(A)$ имеет тот же смысл, что и аналогичная величина в формуле (2). Докажите, что всегда $r(A) \geq \frac{2|A|^2}{n} - |A|$.

Задача 54. Выведите из предыдущей задачи неравенство $\alpha(G_{1/2}(n, 2, 1)) \leq (\frac{1}{2} + \varepsilon)n \log_2 n$, справедливое при каждом $\varepsilon > 0$ почти наверное.

Задача 55*. Докажите нижнюю оценку для $\alpha(G_{1/2}(n, 2, 1))$, имеющую порядок роста $cn \log_2 n$ с некоторым $c > 0$.

Задача 56.** Найдите константу c в утверждении: для любого $\varepsilon > 0$ почти наверное

$$(c - \varepsilon)n \log_2 n \leq \alpha(G_{1/2}(n, 2, 1)) \leq (c + \varepsilon)n \log_2 n.$$

Список цитированной литературы

- [1] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.
- [2] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.
- [3] А.М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2010.
- [4] А.М. Райгородский, *Модели случайных графов*, Москва, МЦНМО, 2011.