A7. Слово с периодом (a) можно задать запретом слова b, при этом меньше чем одним запретом обойтись, очевидно, не удастся.

Для всех конечных слов v, состоящих из букв a и b, определим $\varphi(v)$ по следующему правилу: $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = a$, $\varphi(a_1a_2\dots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)$. Индукцией по k несложно доказать, что $u_{k+1} = \varphi(u'_k)$, где u'_k – циклический сдвиг слова u_k на одну букву.

Лемма. Пусть период $(v) \neq (b)$ задаётся k запретами и не задаётся $k-1$ запретом. Тогда период $(\varphi(v))$ задаётся $k+1$ запретами и не задаётся k.

$\square$ 1. Пусть период (v) задаётся минимальной системой запрещённых слов $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Построим систему запретов для $\varphi(v)$. Во-первых, включим туда bb. Вовторых, каждое слово вида v_i представляется в виде w_ia или w_ib. В первом случае включим в систему запретов $\varphi(w_i)ab$, а во втором случае – $\varphi(w_i)aa$.

Слова, не содержащие bb – это в точности те слова, которые представляются в виде $\varphi(x)$ для некоторого бесконечного x. Заметим, что x можно определить однозначно.

Слова, не содержащие bb и $\varphi(w_i)ab$ – это в точности все слова, представляющиеся в виде $\varphi(x)$ при условии, что x не содержит w_ia.

Слова, не содержащие bb и $\varphi(w_i)aa$ – это в точности все слова, которые представляются в виде $\varphi(x)$ при условии, что x не содержит w_ib.

Значит, слова, разрешаемые новой системой запретов – в точности те, которые представляются в виде $\varphi(x)$, где x не содержит слова из набора v_i, то есть имеют вид $(\varphi(v))$.

2. Покажем, что потребуется хотя бы k запретов. Пусть есть некоторая минимальная система запретов, задающая $(\varphi(v))$. В этой системе должно быть слово вида b^n. Если $n > 2$, то система не минимальная, так как это слово можно заменить на bb (так как bb не встречается во всём слове, и здесь мы используем, что запрета b нет).

Тогда слова, запрещаемые словом bb – в точности те, которые представляются в виде $\varphi(x)$.

Никакой из оставшихся запретов не может оканчиваться на ba, иначе у него можно отбросить последнюю букву.

Если какой-то из запретов *начинается* на b, то перед ним можно написать a – получится не менее сильная система запретов (на этом шаге мы отказываемся от минимальности). Тогда каждый из них представляется одним из двух видов: $\varphi(w)aa$ или $\varphi(w)ab$.

Повторяем рассуждения: слова, не содержащие bb и $\varphi(w)ab$ – это в точности все слова, представляющиеся в виде $\varphi(x)$ при условии, что x не содержит wa.

Слова, не содержащие bb и $\varphi(w)aa$ – это в точности все слова, которые представляются в виде $\varphi(x)$ при условии, что x не содержит wb.

Для каждого из запрещающих слов (кроме bb) строится некоторое слово v_i, и известно, что слова, избегающие запрещающих – это в точности те слова, которые представляются в виде $\varphi(x)$, где x не содержит слов из набора v_i. С другой стороны, это по условию все те слова, которые представляются в виде $\varphi(x)$, где x периодично с периодом v. Значит, набор $\{v_i\}$ однозначно задаёт слова с периодом v, то есть их не менее $k+1$, а всего не менее $k+1$. $\square$

Из леммы и наблюдения, что слова $\varphi(u_k)$ и u_{k+1} являются циклическими сдвигами друг друга, следует ответ $k+1$.

C4. Докажем, что длина периода не может быть более 2^{k-1}. Рассмотрим в бесконечном слове $\dots a_{-1}a_1a_2\dots$ $2^{k-1}+1$ подслов длины $k-1$, первые буквы которых имеют номера 0, 1, 2, ..., 2^{k-1}. По принципу Дирихле среди них есть два одинаковых. Пусть это слова, начинающиеся с позиций i и j. Тогда слово $(a_ia_{i+1}\dots a_{j-1})$ имеет период не больший, чем 2^{n-1}. Так как все его слова длины k являются подсловами исходного, то оно не запрещено.

Докажем, что существует периодичное слова с длиной периода ровно 2^{k-1} такое, что в его периоде встречаются все возможные подслова длины $k-1$ по одному разу. Тогда в качестве запрещённых возьмём все не встречающиеся в периоде слова длины k, и эти слова будут определять период слова, так как мы куску длины $k-1$ всегда можно будет определить следующую букву.

Итак, пример. Рассмотрим ориентированный граф на 2^{k-2} вершине. Его вершины – это слова длины $k-2$, они соединены стрелкой, если пересекаются по слову длины $k-3$. Пример: $k=7$, из вершины $abbab$ ведут рёбра в $bbaba$ и $bbabb$.

Этот граф сильносвязен и исходящие степени всех вершин одинаковы. Следовательно, существует циклический обход его рёбер (Эйлеров обход). Рассмотрим бесконечный путь, повторяющий этот обход. Этому пути соответствует искомое слово с длиной периода 2^{k-1}.

A7. The word (a) can be defined by forbidden word b. It is obvious we can not use empty set of forbidden words.

For a finite word v, if it consists of letters a and b, define $\varphi(v)$ according the rule

$$\varphi(a)=ab; \varphi(b)=a; \varphi(a_1a_2\dots a_n)=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n)$$

. We can prove (induction on k) that $u_{k+1}=\varphi(u'_k)$ if u'_k is the one-letter cyclic shift of u_k.

Lemma. Suppose $(v)\neq(b)$, this word can be defined by k forbidden words and can not be defined by $k-1$. Then the period $(\varphi(v))$ can be defined by $k+1$ f.w. and can not be defined by k.

$\square$ 1. Suppose $v_1, v_2, \dots, v_k$ is the minimal system of f.w. that defines (v).

Construct system od forbidden words for $(\varphi(v))$.

The first word will be bb. For each v_i we take a forbiden word as follows: if v_i has form $v_i=w_ia$, we add $\varphi(w_i)ab$. In other case (i.e. $v_i=w_ib$) we take $\varphi(w_i)aa$ as a forbidden word.

The set of words y that do not include bb is exactly the set of words that can be expressed as $y=\varphi(x)$ for some infinite x. Notice, that x is defined unique by y.

Words without subwords bb and $\varphi(w_i)ab$ are all words of form $\varphi(x)$ with condition "x has not the factor w_ia".

Words without subwords bb and $\varphi(w_i)aa$ are all words of form $\varphi(x)$ with condition "x has not the factor w_ib".

So, the set of words that are not forbidden is exactly the set of words of form $\varphi(x)$ for x that has not words v_i as subwords. And such words have period $(\varphi(v))$.

2. Now we'll prove we need k forbiden words. Let set $\{v_i\}$ be a set of forbiden words that defines $(\varphi(v))$. This set forbids (b) so it includes a word b^n for some n. Case $n = 1$ is not interesting. If there is forbiden word b^n for $n > 2$ then we can change this ford by bb, and the system will forbid the same set of infinite words.

The set of words y that do not include bb is exactly the set of words that can be expressed as $y = \varphi(x)$ for some infinite x.

Suppose the set contains a forbiden word u and u ends by ba. Then we delete the last letter of v_i, this this operation will not change the set of allowed infinite words (because we also have bb).

If some v_i has its first letter b, we change v_i by av_i.

After these operations we get the same number of words, and they forbid the same set of infinite words. Each of v_i has form $\varphi(w_i)aa$ either $\varphi(w_i)ab$ for some w_i.

As before: words without subwords bb and $\varphi(v_i)aa$ are all words of form $\varphi(x)$ with condition "x has not the factor w_ib".

Words without subwords bb and $\varphi(v_i)ab$ are all words of form $\varphi(x)$ with condition "x has not the factor w_ia".

Each of $\{v_i\}$ (besides bb) defines a word w_i. Infinite words without $\{v_i\}$ are exactly the words of form $\varphi(x)$, where x has not any w_i as a factor. From the other hand this is the set of periodic words with period $(\varphi(v))$. It means that the set $\{w_i\}$ defines the period v and there are at least k of them, and there are al least $k + 1$ words in $\{v_i\}$. $\square$

This lemma and the fact before the lemma imply that the answer is $k + 1$.

C4. At first we prove the period can not be larger then 2^{k-1}. Conside in a (not forbiden) infinite word $\dots a_{-1}a_1a_2\dots$ a set of $2^{k-1} + 1$ subwords of length $k - 1$, (these words start at positions 0, 1, 2, ..., 2^{k-1}). Dirichlet principle: there are two equal among them. Suppose these two words start at positions i and j. Then the word $(a_ia_{i+1}\dots a_{j-1})$ is periodic with period equal or less then чем 2^{n-1}. Since all its factors of length k are factors of $\dots a_{-1}a_1a_2\dots$, it is not forbiden.

Now se prove there exists a periodic word with period of length 2^{k-1} that contains all possible subwords of length $k-1$ (one occurence each). Then forbiden words of lenght k are all words that are not in period. These words will define the period, because every pattern with length at least $k - 1$ is prolongable right uniqe way.

How we construct such a word? Consider oriented graph on 2^{k-2} vertices and 2^{k-1} edges. Vertices are words of length $k - 2$, two words are connected with an arrow iff they overlap by a word of length $k - 3$. Example: $k = 7$, vertex $abbab$ has outdegree 2 and edges from it go to $bbaba$ and $bbabb$.

This graph is strictly connected and all outdegrees and indegrees are equal to two. It follows the existence of a cyclic path that goes each edge once (Eurler circuit). We turn this path to a periodic one repeating is infinitly manu times. Last letters of vertices on this path form a periodic word we want.