Наборы прямых на плоскости

К. Куюмжиян, Е. Молчанов, И. Шнурников

Пусть набор из n различных прямых делит плоскость на f частей. Цель следующей серии задач — найти все возможные числа f частей плоскости для фиксированного числа прямых n. В 1993 г. Н. Мартинов нашел все такие числа, а в 2007 г. В.И. Арнольд предложил новую схему доказательства, которой мы будем следовать.

Задачи до промежуточного финиша

Число прямых в наборе всегда будет обозначаться через n ($n \geqslant 1$), а число частей (многоугольных или неограниченных областей) плоскости, разделённой этим набором, через f.

Задача 1. Для произвольного n найдите минимальное и максимальное возможные значения f.

Задача 2. Для каждого отдельного значения n найдите все возможные числа f, где
(a) $1 \leqslant n \leqslant 5$,
(b) $n = 6,\ 7$.

Максимальное число параллельных прямых в наборе обозначим через p. Максимальное число проходящих через одну точку прямых в наборе обозначим через q. Число точек пересечения, каждая из которых принадлежит i прямым набора, обозначим через r_i, где $2 \leqslant i \leqslant q$.

Задача 3. Докажите, что
(a) $f \geqslant (p+1)(n-p+1)$,
(b) $f \geqslant q(n-q+2)$,
(c) оценки пунктов (a) и (b) реализуются,
(d) $f = n + 1 + \sum_{i=2}^{q}(i-1)r_i$.

Задача 4. Докажите, что число областей f не может принадлежать интервалам
(a) $(n+1;\ 2n)$ для $n \geqslant 3$,
(b) $(2n;\ 3n-3)$ для $n \geqslant 5$,
(c) $(3n-2;\ 4n-8)$ для $n \geqslant 8$.

Задача 5. Найдите максимальные возможные значения f для фиксированных чисел
(a) n и p,
(b) n и q.

Для фиксированных n и p, $1 \leqslant p \leqslant n$, обозначим через $a(n,p)$ и $b(n,p)$ следующие числа:

$$b(n,p) = (p+1)(n-p+1) + C_{n-p}^2\ , \qquad a(n,p) = b(n,p) - \min\left\{p, C_{n-p}^2\right\}.$$

Задача 6. Для любого целого числа p, $1 \leqslant p \leqslant n$, и любого целого числа f, где $a(n,p) \leqslant f \leqslant b(n,p)$, приведите пример набора из n прямых, делящего плоскость на f областей и имеющего максимум p параллельных прямых.

Основная теорема. Для фиксированного n множество всех возможных чисел f есть объединение натуральных чисел отрезков $[a(n,p);\ b(n,p)]$ по всем p, где $1 \leqslant p \leqslant n$.

Другими словами, все возможные числа областей f реализуются примерами задачи 6. Однако пока не очевидно, почему числа, не попадающие в отрезки $[a(n,p);\ b(n,p)]$, не могут быть числами областей. Дело в том, что для фиксированных чисел n и p соответствующие наборы могут делить плоскость менее чем на $a(n,p)$ частей.

Задача 7. Найдите все пары чисел n и p, для которых существует набор из n прямых, делящий плоскость на менее чем $a(n,p)$ частей.

Для данного n *лакуной* назовём интервал $(b(n,p+1);\ a(n,p))$, содержащий не менее одного целого числа. Число лакун для данного n обозначим через $L(n)$. Занумеруем лакуны числами от 1 до $L(n)$ по убыванию p (т.е. слева направо).

Задача 8. (a) Выразите число лакун $L(n)$ явной формулой через n для $n \geqslant 3$.

(b) Сколько целых чисел содержит лакуна номер j для $1 \leqslant j \leqslant L(n)$?

Задача 9. Предположим, что существуют n прямых, делящих плоскость на f частей, где число f принадлежит лакуне номер j. Докажите, что $p \leqslant j-1$ и $q \leqslant j$.

Задача 10. Докажите, что

$$\sum_{i=2}^{q} i(i-1)r_i \geqslant n(n-p).$$

Задача 11. (a) Докажите, что $f \geqslant n+1+\frac{n(n-p)}{q}$.

(b) Докажите, что число f не может принадлежать лакуне номер j для $1 \leqslant j \leqslant \sqrt{n}$.

Задача 12. Докажите, что если $p < n$, то

$$r_2 + n \geqslant 3 + r_4 + 2r_5 + 3r_6 + \cdots + (q-3)r_q.$$

Задача 13. (a) Докажите, что

$$f \geqslant 2\frac{n(n-p)}{q+3}.$$

(b) Докажите, что число f не может принадлежать лакуне номер j для $1 \leqslant j \leqslant L(n)-2$.

Задача 14. В выпуклом n–угольнике ($n \geqslant 4$) проведены все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке.

(a) Сколько получилось точек пересечения диагоналей? (Вершины не считаются точками пересечения диагоналей.)

(b) На сколько частей диагонали разбивают внутренность n–угольника?

Задача 15*. Докажите, что число f областей плоскости, разделённой n прямыми, не может принадлежать последним двум лакунам (номер $L(n)-1$ и $L(n)$).

Задача 16*. На плоскости даны n точек, не лежащие на одной прямой. Рассмотрим прямые, проходящие ровно через две из данных точек, и обозначим число таких прямых через m. Докажите, что $C_{m+2}^2 \geqslant n$.

Наборы прямых на плоскости

К. Куюмжиян, Е. Молчанов, И. Шнурников

Задачи после промежуточного финиша

Рассмотрим плоскости α_1 и α_2 в трёхмерном пространстве и точку O, не лежащую ни на одной из них. *Центральным проектированием* называется преобразование, при котором точке X плоскости α_1 ставится в соответствие точка пересечения прямой OX с плоскостью α_2.

Задача 17. Пусть на плоскости α_1 дан набор прямых. Найдите образы прямых и областей плоскости α_1 при центральном проектировании на плоскость α_2 относительно точки O. Можно считать, что в наборе есть две пересекающиеся прямые.

Будем считать, что прямые, параллельные данной прямой l, проходят через *бесконечно удалённую точку*, соответствующую направлению l. Центральное проектирование бесконечно удалённой точки, соответствующей направлению l, есть точка пересечения плоскости α_2 с прямой, проходящей через точку O параллельно l (если l параллельна α_2, то образом будет бесконечно удалённая точка плоскости α_2, соответствующая направлению l).

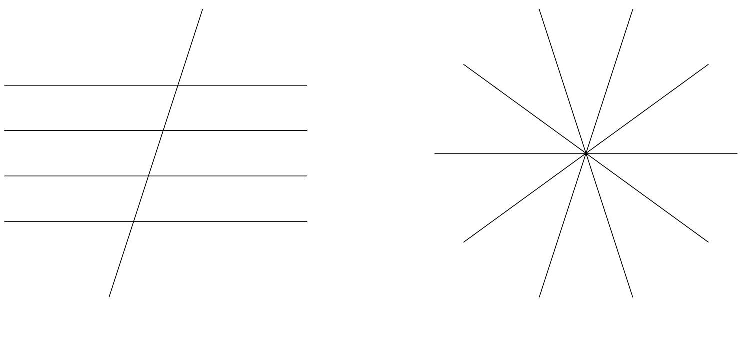
Задача 18. Докажите, что центральное проектирование есть взаимно однозначное отображение плоскостей вместе с их бесконечно удалёнными точками. Найдите образ и прообраз бесконечно удалённых точек плоскостей α_1 и α_2, соответственно.

Назовём *проективной плоскостью* плоскость вместе с её бесконечно удалёнными точками, а *набором прямых* на проективной плоскости — набор прямых вместе с соответствующими им бесконечно удалёнными точками. При этом одна из прямых набора может быть бесконечно удалённой. Для набора n прямых на проективной плоскости обозначим через t_i число точек проективной плоскости, принадлежащих i прямым, где $2 \leqslant i \leqslant n$.

Задача 19. Докажите, что для n прямых на проективной плоскости

$$\sum_{i \geqslant 2} i(i-1)t_i = n(n-1).$$

Заметим, что проективная плоскость позволяет объяснить следующее сходство между параллельными прямыми и прямыми, проходящими через одну точку. Возьмём два набора из $k+1$ прямых на плоскости: первый состоит из k параллельных прямых и одной секущей, а второй из $k+1$ проходящих через одну точку прямых:



Оба набора делят плоскость на $2k+2$ области, и это не случайное совпадение. Если к обоим наборам добавить бесконечно удалённую прямую, то получатся наборы из $k+2$ прямых, которые переводятся друг в друга центральным проектированием и поэтому имеют одинаковое число областей. В этой связи можно ожидать, что решить задачу 15 будет проще на проективной плоскости.

Задача 20. Дано n прямых на проективной плоскости. Определите области проективной плоскости так, чтобы при центральном проектировании области переходили в области взаимно однозначно. Как по двум данным точкам и набору прямых узнать, принадлежат ли точки одной области?

В дальнейшем число областей проективной плоскости будем обозначать через f, а максимальное число прямых набора, проходящих через одну точку, через m.

Задача 21. Докажите следующие аналоги задач 3, 12 и 13.

(a)
$$f = 1 + t_2 + 2t_3 + \ldots + (n-1)t_n,$$

(b)
$$m(n-m+1) \leqslant f \leqslant m(n-m+1) + C_{n-m}^2.$$

(c) Если $m < n$, то
$$t_2 \geqslant 3 + t_4 + 2t_5 + 3t_6 + \ldots + (m-3)t_m.$$

(d) Если $m < n$, то для любого целого числа M, $M \geqslant m$, верно
$$f \geqslant 2\left(\frac{n^2 - n + 2M}{M+3}\right).$$

Задача 22*. Пусть $n \geqslant 2m+2$ и $t_m \geqslant 2$. Докажите, что $f \geqslant (m+1)(n-m)$. Верно ли это для $n = 2m+1$?

Задача 23*. Сформулируйте и докажите основную теорему для наборов n прямых на проективной плоскости. Завершите доказательство основной теоремы для обычной плоскости.

Задача 24. (a) На сколько областей могут разделить плоскость n окружностей, проходящих через одну точку?

(b) Рассмотрим на сфере окружности, получаемые как сечения сферы плоскостями, проходящими через её центр. На сколько частей могут разделить сферу n таких окружностей?

Дальнейшая цель — доказать теорему Сильвестра и её обобщения.

Задача 25. (Теорема Сильвестра) (a) На плоскости даны n точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что найдётся прямая, на которой лежат только две данные точки.

(b) На плоскости проведены n прямых, причём не все они параллельны и не все пересекаются в одной точке. Докажите, что найдётся точка, принадлежащая ровно двум прямым.

Оказывается, что в условиях задачи 25(b) найдётся несколько таких точек. Чтобы оценить их число, удобнее рассматривать наборы прямых на проективной плоскости.

Обозначим через p_j число j-угольных областей проективной плоскости, образованных этим набором прямых.

Задача 26. Докажите, что если $t_n = 0$, то

$$\sum_{i\geqslant 2}(3-i)t_i + \sum_{j\geqslant 3}(3-j)p_j = 3.$$

Задача 27. Дан набор n прямых на проективной плоскости такой, что $t_n = 0$. Найдите минимальные возможные значения t_2 отдельно для каждого $n \leqslant 9$.

Задача 28. (a) Приведите примеры наборов n прямых с $t_2 = \frac{n}{2}$ для чётных $n \geqslant 6$.

(b) Приведите примеры наборов n прямых с $t_2 = 3\left[\frac{n}{4}\right]$ для нечётных $n \geqslant 7$.

Задача 29$^\bigstar$. Докажите, что если $t_n = 0$, то $t_2 \geqslant \frac{3}{7}n$.

Задача 30$^\bigstar$. (Гипотеза Дирака 1951-го года). Если $t_n = 0$, то $t_2 \geqslant [\frac{n}{2}]$.

Очередная цель — доказать ряд неравенств, в которых участвуют сразу несколько чисел t_i.

Задача 31*. Если $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$, то

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geqslant 8 + \sum_{i\geqslant 4}\left(2i - 7\frac{1}{2}\right)t_i.$$

Задача 32. Дано n прямых на проективной плоскости. Отметим красным цветом точки пересечения, принадлежащие ровно двум прямым. Синим цветом отметим точки пересечения, принадлежащие не менее чем трём прямым. Отрезки прямых с одноцветными концами, не содержащие внутри себя цветных точек, покрасим в цвет своих концов. Обозначим через x и y числа красных и синих отрезков соответственно. Покрасим зелёным цветом области, ограниченные не менее чем четырьмя отрезками данных прямых и содержащие на своей границе хотя бы одну красную точку. Число пар, состоящих из зелёной области и лежащей на её границе синей точки, обозначим через z. Докажите, что

(a)

$$x - y = 2t_2 - \sum_{i\geqslant 3} it_i.$$

(b) Если не существует таких двух точек, что любая данная прямая проходит хотя бы через одну из них, то

$$y + z \geqslant \frac{3}{2}\sum_{i\geqslant 3} t_i.$$

(c) Если $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$, то

$$x + z \leqslant 3p_4 + \sum_{j\geqslant 5} jp_j.$$

Задача 33*. Найдите новые соотношения между t_i и p_j (не выводящиеся тривиально из задач 26 и 31, но, возможно, использующие задачу 32).