Об изогональном сопряжении, точках Микеля, прямых Гаусса и др.

Н.Белухов, А.Заславский, П.Кожевников

1 Вводные задачи

1. **Изогональное сопряжение.** Дан треугольник ABC и точка P.
a)Докажите, что прямые, симметричные AP, BP, CP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке или параллельны. Полученная точка P' называется *изогонально сопряженной* P относительно треугольника ABC.
b)Докажите, что P' — бесконечно удаленная точка (т.е. три соответствующие прямые параллельны) тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC.
c)Найдите образ при изогональном сопряжении окружности, проходящей через две вершины треугольника.
d)[1] Докажите, что проекции P и P' на стороны ABC лежат на одной окружности. Как звучит это утверждение, если P' бесконечно удалена?
e)Если X, X' и Y, Y' — две пары изогонально сопряженных точек, то $XY \cap X'Y'$ и $XY' \cap X'Y$ изогонально сопряжены.

Дан четырехугольник $ABCD$ и точка P.
f)Докажите, что, если три из четырех прямых, симметричных AP, BP, CP, DP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке, то четвертая также проходит через эту точку.
g)Докажите, что точка, изогонально сопряженная P относительно четырехугольника, существует тогда и только тогда, когда проекции P на стороны лежат на одной окружности (причем на этой окружности лежат и проекции изогонально сопряженной точки).

Коникой, вписанной в многоугольник, называется коника, касающаяся всех прямых, содержащих стороны многоугольника.
h)Докажите, что фокусы вписанной в треугольник коники изогонально сопряжены.
i)Докажите, что фокус любой параболы, касающейся прямых AB, BC, CA, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. **Точка Микеля.** Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F.
a)Докажите, что в обозначениях предыдущей задачи окружности, описанные около треугольников ABF, CDF, ADE и CDE, пересекаются в одной точке M (точке Микеля четверки прямых AB, BC, CD, DA).
b)Докажите, что M — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BE в FD (или DE в FB, и т.д.)
c)Два таракана B и C ползут с постоянными скоростями по двум прямым, пересекающимся в точке A. Докажите, что окружности ABC проходят через фиксированную точку, а прямые BC касаются фиксированной параболы.
d)(IMO2005) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех этих треугольников, имеют общую точку, отличную от P.
e)Выясните связь точки Микеля со вписанными кониками.

[1]Здесь и далее мелким шрифтом набраны задачи, которые не используются при получении основных результатов, приведенных в разделе 2.

f)Докажите, что проекции точки Микеля на стороны четырехугольника лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса. Как связана эта прямая со вписанной в четырехугольник параболой?

3. **Прямая Гаусса.** Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F.

a)Докажите, что середины отрезков AC, BD и EF лежат на одной прямой (прямой Гаусса четырехугольника $ABCD$, или четверки прямых AB, BC, CD, DA).

b)Докажите, что центры окружностей, проходящих через проекции пары изогональных относительно четырехугольника точек, лежат на прямой Гаусса четырехугольника.

c)Докажите, что точка Микеля четырехугольника изогонально сопряжена бесконечно удаленной точке его прямой Гаусса.

d)Докажите, что центры коник, вписанных в четырехугольник, лежат на его прямой Гаусса.

e)(Всероссийская олимпиада 2009) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

2 Три Микеля для квартетов.

В задачах этого раздела рассматривается следующая конструкция и используются следующие обозначения. A, B, C, D — четыре точки общего положения. X — точка Микеля прямых AB, AC, BD, CD, Y — точка Микеля прямых AB, AD, BC, CD, Z — точка Микеля прямых BC, AC, BD, AD. $P_X = AD \cap BC$, $P_Y = AC \cap BD$, $P_Z = AB \cap CD$. K_X, L_X — середины BC и AD, K_Y, L_Y — середины AC и BD, K_Z, L_Z — середины AB и CD. Γ_X, Γ_Y, Γ_Z — прямые (Гаусса для соответствующих четверок прямых) K_XL_X, K_YL_Y, K_ZL_Z.

4. Докажите, что прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке D' или параллельны. Аналогично определяются точки A', B', C' как центры перспективы треугольника XYZ с треугольниками DCB, CDA, BAD.

5. Докажите, что A', B', C', D' — точки, изогонально сопряженные A, B, C, D относительно треугольника XYZ.

6. Докажите, что X, Y, Z — точки Микеля для четверки точек A', B', C', D'.

7. Докажите, что прямые AA', BB', CC' и DD' параллельны.

8. Докажите, что прямые AD, $A'D'$ и YZ пересекаются в одной точке (и аналогичные пересечения).

9.

a)Докажите, что точки X, Z, P_Y, K_Y, L_Y лежат на одной окружности $-\omega_Y$. Окружности ω_X, ω_Z определяются аналогично.

b)Докажите, что окружности ω_X, ω_Y, ω_Z проходят через одну точку T (или совпадают).

c)Докажите, что прямые XP_X, YP_Y, ZP_Z проходят через T.

3 Квартеты для трех Микелей.

Дан треугольник XYZ. Определим преобразование ψ_X, как композицию симметрии относительно биссектрисы угла X и инверсии с центром X и таким радиусом R, что $R^2 = XY \cdot XZ$. Аналогично определим ψ_Y, ψ_Z.

10. Докажите, что

a)$\psi_X(Y) = Z$, $\psi_X(Z) = Y$;

b)ψ_X^2 — тождественное преобразование;

c)Композиция ψ_X, ψ_Y и ψ_Z — тождественное преобразование.

Пусть D — произвольная точка, $A = \psi_X(D)$, $B = \psi_Y(D)$, $C = \psi_Z(D)$.

11. Докажите, что $\triangle XDZ \sim \triangle XYA$ и $\triangle XDY \sim \triangle XZA$.

12. Докажите, что каждое из преобразований ψ_X, ψ_Y, ψ_Z переводит набор из четырех точек A, B, C, D в себя.

Будем называть набор из четырех (не обязательно различных) точек A, B, C, D *квартетом.* Из последней задачи следует, что вся плоскость может быть разбита на квартеты.

13. Докажите, что четверка точек, изогонально сопряженных квартету — квартет.

14. Найдите квартеты, содержащие

a)центр I вписанной окружности треугольника X, Y, Z;

b)центр O его описанной окружности.

c)Найдите неподвижные точки преобразования ψ_Z и соответствующие квартеты.

15.

a)Докажите, что X — точка Микеля прямых AB, AC, BD, CD.

b)Докажите обратное утверждение: если X, Y, Z — точки Микеля, определяемые точками A, B, C, D, то A, B, C, D образуют квартет.

16. Докажите, что каждое из преобразований ψ_X, ψ_Y, ψ_Z коммутирует с изогональным сопряжением относительно треугольника XYZ.

17. Пусть точки A, B, C, D образуют квартет относительно треугольника XYZ, A', B', C', D' изогонально сопряжены им. Тогда существуют вписанные в треугольник коники с фокусами A и A', B и B', C и C', D и D'.

a)Докажите, что эти коники гомотетичны друг другу.

b)Докажите, что середины шести отрезков, соединяющих центры этих коник, лежат на гомотетичной им конике, описанной около треугольника XYZ.

18. Внутри треугольника ABC лежат две изогонально сопряженные точки M и N. Известно, что $AM \cdot AN \cdot BC = BM \cdot BN \cdot AC = CM \cdot CN \cdot AB = k$.

a)Докажите, что середина MN совпадает с центром тяжести треугольника.

b)Выразите k через стороны треугольника.

4 Дополнительные задачи.

19.
a)Пусть A, B, C, D — квартет, A', B', C', D' — изогонально сопряженный квартет; P_X — точка пересечения AD и BC, P_Y — AC и BD, P_Z — AB и CD. Точки Q_X, Q_Y, Q_Z определяются аналогично по точкам A', B', C', D'. Докажите, что прямые P_XQ_X, P_YQ_Y, P_ZQ_Z пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника XYZ (из предыдущих обозначений).
b)В обозначениях предыдущего пункта докажите, что прямые P_XQ_Y, P_YQ_X и XY пересекаются в одной точке.
c)Обозначим точку, полученную в предыдущем пункте через Z'. Докажите, что ZZ' параллельна AA', BB', CC', DD'.
d)Пусть D_1, D_1' и D_2, D_2' — две пары изогонально сопряженных точек такие, что $D_1D_1' \parallel D_2D_2'$. Докажите, что прямые $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ пересекаются в одной точке (A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 — квартеты).
20. Даны точки A, B, C, D. Известно, что треугольник XYZ перспективен каждому из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB (именно в таком порядке вершин). Точки D', A', B', C' — соответствующие центры перспективы. Докажите, что прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.