

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

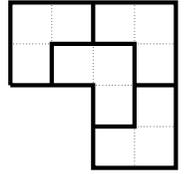
Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток — выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).
- 2 а) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.
- 3 б) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?



Егор Бакаев

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если
- 2 а) $k = 9$;
- 4 б) $k = 8$?

Александр Шаповалов

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника
- 3 а) не больше $3P/4$, где P — периметр этого треугольника;
- 5 б) не меньше $3p/4$, где p — полупериметр этого треугольника.

Лев Емельянов

4. Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9 , сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1 . Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Александр Шаповалов

5. В треугольнике ABC медианы AA_0 , BB_0 , CC_0 пересекаются в точке M . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0 , MCB_0 , MA_0C_0 , MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

Павел Кожеевников

6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « \pm », а также обычные знаки «+», «-», « \times » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « \pm » либо «+», либо «-» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0, 5) \pm 0, 5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны
- 3 а) числа 1, 2, 4;
- 7 б) любые 100 различных действительных чисел?

Koh, Bong-Gyun (Южная Корея)

7. У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

Михаил Евдокимов

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 3 1. Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

Борис Френкин

- 6 2. Дан клетчатый квадрат 10×10 . Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

Павел Кожеевников

- 6 3. Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше, чем $1/2016$.

Александр Храбров

- 7 4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q . Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180° .

Максим Дидин

- 2 5. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « \pm », а также обычные знаки « $+$ », « $-$ », « \times » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « \pm » либо « $+$ », либо « $-$ » во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0, 5) \pm 0, 5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

- 2 а) числа 1, 2, 4;
6 б) любые 100 различных действительных чисел?

Koh, Bong-Gyun (Южная Корея)

- 6 6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

- 6 а) $h = 17$ см;
6 б) $h = 18$ см?

Михаил Евдокимов

- 12 7. Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N - 1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

Никита Гладков