ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 11 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

Егор Бакаев

4 2. Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

Егор Бакаев

5 3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

Егор Бакаев

5 4. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB — точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.

Егор Бакаев

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

3 а) $m = 99$;

3 б) $m = 100$?

Егор Бакаев

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 11 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p+n$? *Борис Френкин*
4	2.	Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK — биссектриса в треугольнике ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD. *Егор Бакаев, Александр Зимин*
4	3.	Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3. *Егор Бакаев*
	4.	В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если
2	а)	$m = 99$;
2	б)	$m = 100$? *Егор Бакаев*
5	5.	Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией? *Георгий Жуков*