ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

5 1. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

Г. Жуков, Н. Косинов

5 2. Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

Н. Авилов

6 3. В треугольнике ABC угол C прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

Р. Гордин

7 4. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

Е. Бакаев

9 5. В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

П. Кожевников

10 6. Число

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если $3n+1$ — простое число, то числитель получившейся дроби делится на $3n+1$.

М. Малкин

12 7. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Е. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 — 1. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

Е. Бакаев

6 — 2. Найдите все n, для которых верно утверждение:
для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^ℓ, где $0 \le k, \ell \le n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^\ell$ не будут иметь общих точек.

Г. Жуков

6 — 3. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BD, BE лежат на одной окружности.

А. Заславский

7 — 4. Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

Bong-Gyun Koh (Южная Корея)

5. Существуют ли такие две функции f и g, принимающие только целые значения, что для любого целого x выполнены соотношения:

3 — а) $f(f(x)) = x, \quad g(g(x)) = x, \quad f(g(x)) > x, \quad g(f(x)) > x$?

5 — б) $f(f(x)) < x, \quad g(g(x)) < x, \quad f(g(x)) > x, \quad g(f(x)) > x$?

Л. Стунжас

9 — 6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Е. Бакаев

14 — 7. На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причём через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.)

А. Шаповалов, А. Лебедев