ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи	
4	1.	На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
4	2.	Двадцать детей — десять мальчиков и десять девочек — встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка — сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.
5	3.	Можно ли в клетках таблицы 19×19 отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах 10×10 было разное количество отмеченных клеток?
5	4.	По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел?
6	5.	Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
8	6.	Пусть I — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC, касающейся катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_0 на прямую AI, и перпендикуляр, опущенный из B_0 на прямую BI, пересекаются в точке P. Докажите, что прямые CP и AB перпендикулярны.
9	7.	В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из m человек, команда математиков — из n, причем $m \neq n$, а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
4	2.	На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — отважным, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке?
6	3.	Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
6	4.	Числа $1, 2, \ldots, 100$ стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?
7	5.	На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну — в красный цвет, другую — в синий, третью — в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке «красный, синий, желтый» (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов.) Докажите, что сколько бы ходов ни было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой.
	6.	Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений.
4	а)	Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника.
5	б)	Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми).
	7.	Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать.
5	а)	Могут ли они гарантировать результат более 500?
7	б)	Могут ли они гарантировать результат не менее 999?