ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 24 февраля 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы	задачи	
3	1.	На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?
4	2.	Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)
4	3.	Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.
5	4.	На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.
5	5.	В четырёхугольнике $ABCD$ угол B равен $150°$, угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BC и прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 24 февраля 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
3	1.	Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)
4	2.	На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE — высота, опущенная на гипотенузу AB. Докажите, что угол LEM прямой.
4	3.	На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.
4	4.	Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать?
5	5.	Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни — целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней.