ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число? *И. И. Богданов*
5	2.	Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 222 ореха по двум коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 222. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую третью коробочку и предъявляет Чичикову одну или две коробочки, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев? *А. Подольский*
6	3.	В некоторых клетках таблицы 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 этой таблицы тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали таблицы. *Е. Бакаев*
7	4.	Дан треугольник ABC. Пусть I — центр вписанной в него окружности, X, Y, Z — центры окружностей, вписанных в треугольники AIB, BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ, совпадает с I. Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний? *Б. Р. Френкин*
8	5.	Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов. *В. Брагин*
	6.	
4	а)	Внутри окружности находится некоторая точка A. Через A провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.
4	б)	Внутри окружности находится правильный $2n$-угольник ($n \geq 2$), его центр A не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из A в вершины $2n$-угольника, высекают $2n$ точек на окружности. $2n$-угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают $2n$ новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых $2n$ точек. *И. В. Митрофанов*
10	7.	Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $\|x - a\|$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x? *С. Сафин*

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ... Известно, что для любого номера k можно указать такое натуральное число t, что $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая, то есть существует ли такое натуральное T, что $a_k = a_{k+T}$ при любом натуральном k? *Л. Штейнгарц*
5	2. Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 1001 орех по трем коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 1001. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую четвертую коробочку и предъявляет Чичикову одну или несколько коробочек, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев? *А. Подольский*
6	3. Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов. *В. Брагин*
8	4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1, отличные от вершин. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой. *А. А. Полянский*
8	5. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $\lvert x - a \rvert$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x? *С. Сафин*
	6.
5	а) Внутри сферы находится некоторая точка A. Через A провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.
5	б) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из A в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек. (Напомним, что икосаэдр — это правильный многогранник, у которого 20 треугольных граней и в каждой вершине сходятся 5 граней.) *И. В. Митрофанов*
10	7. Клетчатая полоска $1 \times 1\,000\,000$ разбита на 100 сегментов. В каждой клетке записано целое число, причем в клетках, лежащих в одном сегменте, числа совпадают. В каждую клетку поставили по фишке. Затем сделали такую операцию: все фишки одновременно передвинули, каждую — на то количество клеток вправо, которое указано в ее клетке (если число отрицательно, то фишка двигается влево); при этом оказалось, что в каждую клетку снова попало по фишке. Эту операцию повторяют много раз. Для каждой фишки первого сегмента посчитали, через сколько операций она впервые снова окажется в этом сегменте. Докажите, что среди посчитанных чисел не более 100 различных. *И. В. Митрофанов*