ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3 1. Про группу из пяти человек известно, что

Алеша на 1 год старше Алексеева,
Боря на 2 года старше Борисова,
Вася на 3 года старше Васильева,
Гриша на 4 года старше Григорьева,
а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев.

Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

Е. Бакаев

4 2. Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2, C(11) = 1, C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и

$$C(a + b) = C(a) + C(b)?$$

Г. К. Жуков

5 3. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

А. Ю. Эвнин

5 4. Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB.

П. А. Кожевников

5 5. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в 1/20 всех экскурсий.

Н. К. Верещагин

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Таблица $m \times n$ заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

А. Ю. Эвнин

2. Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

2 — а) равные многоугольники;

3 — б) правильные многоугольники?

Г. А. Гальперин

5 — 3. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/17$ всех экскурсий.

Н. К. Верещагин

4. Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n.

2 — а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и

$$C(a+b) = C(a) + C(b)?$$

3 — б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a+b) > 1000$?

Г. К. Жуков

5 — 5. Из 239 неотличимых на вид монет две — одинаковые фальшивые, а остальные — одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее — фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

К. А. Кноп