ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2011 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
3	1. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011? *А. Бердников*
4	2. На стороне AB треугольника ABC взята точка P такая, что $AP = 2PB$, а на стороне AC — ее середина, точка Q. Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. *В. Произволов*
5	3. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе. *А. Шаповалов*
6	4. На клетчатой доске из 2012 строк и $k > 2$ столбцов в какой-то клетке самого левого столбца стоит фишка. Двое ходят по очереди, за ход можно передвинуть фишку вправо, вверх или вниз на одну клетку, при этом нельзя передвигать фишку на клетку, в которой она уже побывала. Игра заканчивается, как только один из игроков передвинет фишку в самый правый столбец. Но будет ли такой игрок выигравшим или проигравшим — сообщается игрокам только в тот момент, когда фишка попадает в предпоследний столбец (второй справа). Может ли один из игроков обеспечить себе выигрыш? *А. Бердников*
6	5. Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Докажите, что $$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d) \geq 1.$$ *Г. Гальперин*
7	6. По прямому шоссе со скоростью 60 км/ч едет машина. Недалеко от дороги стоит 100-метровый забор, параллельный дороге. Каждую секунду пассажир автомобиля измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100 градусов. *А. Шень*
9	7. Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны. *В. Брагин*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2011 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Петя отметил на плоскости несколько точек (больше двух), все расстояния между которыми различны. Пару отмеченных точек A, B назовём *необычной*, если A — самая дальняя от B отмеченная точка, а B — ближайшая к A отмеченная точка (не считая самой точки A). Какое наибольшее возможное количество необычных пар могло получиться у Пети? *Б. Френкин*
4	2.	Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Докажите, что $$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$ *Г. Гальперин*
5	3.	В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — основания высот из вершин A, B, C, точки C_A и C_B — проекции C_1 на AC и BC соответственно. Докажите, что прямая C_AC_B делит пополам отрезки C_1A_1 и C_1B_1. *Фольклор, предложил Г. Фельдман*
	4.	Существует ли выпуклый N-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если
3	а)	$N = 2011$;
4	б)	$N = 2012$? *И. Богданов*
7	5.	Назовем натуральное число *хорошим*, если все его цифры ненулевые. Хорошее число назовем *особым*, если в нем хотя бы k разрядов и цифры идут в порядке строгого возрастания (слева направо). Пусть имеется некое хорошее число. За ход разрешается приписать с любого края или вписать между любыми его двумя цифрами особое число или же наоборот, стереть в его записи особое число. При каком наибольшем k можно из любого хорошего числа получить любое другое хорошее число с помощью таких ходов? *А. Бердников*
7	6.	Докажите, что при натуральном $n > 1$ число $1^1 + 3^3 + 5^5 + \ldots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}. (В сумме участвует каждое нечетное число k от 1 до $2^n - 1$, возведенное в степень k.) *С. Сафин*
9	7.	100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами. *В. Произволов*