ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
4	1. Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника? *Н. П. Стрелкова*
4	2. Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$. *А. В. Шаповалов*
5	3. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой? *А. К. Толпыго*
6	4. Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз. *Б. Р. Френкин*
7	5. Дан остроугольный треугольник ABC; AA_1, BB_1 — его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на стороны AC и AB, а из точки B_1 опустили перпендикуляры на стороны BC и BA. Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию. *Г. Фельдман*
10	6. Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7. Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи? *А. А. Заславский*
10	7. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$. *R. B. Bapat*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?

А. К. Толпыго

6 2. В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.

М. И. Малкин

3\. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

3 а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

4 б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?

А. В. Шаповалов — п. а), П. В. Сергеев — п. б)

4\. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N-угольник, и из красных — тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N-угольник, и из красных — тоже? Решите задачу

4 а) для $N = 3$;

4 б) для произвольного натурального N, большего 3.

А. В. Грибалко

8 5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Ф. А. Ивлев

8 6. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

R. B. Bapat

11 7. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен, включая информацию о том, кто гении. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

А. В. Шаповалов