ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 24 октября 2010 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
4	1. На плоскости дана прямая. С помощью пятака постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятака), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась. *Г. Фельдман*
5	2. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n + 1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он? *Б. Р. Френкин*
8	3. На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее 25 встреч. *Б. Р. Френкин*
8	4. Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные домино. В каждом домино провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей. *А. В. Шаповалов*
8	5. Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2. *Г. А. Гальперин*
8	6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр из A' на CP пересекается с перпендикуляром из C' на AP в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C. *Ф. А. Ивлев*
12	7. За круглым столом заседают N рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.) *М. В. Прасолов*

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 24 октября 2010 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. В некой стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

2 а) Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным?

3 б) Пусть стерлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи?

И. И. Богданов

6 2. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

Б. Р. Френкин

6 3. Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Г. А. Гальперин

4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

2 а) конечно;

5 б) бесконечно?

И. В. Митрофанов

8 5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC.

Ф. А. Ивлев

12 6. В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что в любом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в любой строке будет хотя бы один невычеркнутый нуль.

А. Ромащенко

14 7. Квадрат $ABCD$ разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура F является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю AC. Докажите, что AC делит площадь фигуры F пополам.

В. В. Произволов