ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 10 октября 2010 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы задачи

4 1. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета — черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках.
(Пифагорова таблица умножения — это клетчатая таблица, в которой на пересечении m-й строки и n-го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).)

С. Прика

4 2. Равнобокая трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам.

Р. К. Гордин

4 3. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

А. В. Шаповалов

4 4. В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки, и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык.

Фольклор, предложил А. Шень

4 5. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

В. В. Произволов

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 10 октября 2010 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистоли и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон — $1/s$ пистолей, где s — не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

а) Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистоли,
2 а затем обменяв полученные пистоли на дублоны, мы получим больше
дублонов, чем было вначале?

3 б) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

Л. Стунжас

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BOC и DOA. Докажите, что

2 а) четырехугольник $ABCD$ — описанный;

3 б) четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей.

П. А. Кожевников

3. Полицейский участок расположен на прямой дороге, бесконечной в обе стороны. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости
5 новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали вдогонку полицейского на новой полицейской машине. Однако вот беда: полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в каком направлении вдоль дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?

Г. А. Гальперин

4. Квадратная доска $n \times n$ разделена на n^2 прямоугольных клеток $n-1$ горизонтальными и $n-1$ вертикальными прямыми. Клетки
5 раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все n клеток черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток доски не меньше общей площади белых.

П. А. Кожевников

5. 55 боксеров участвовали в турнире по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого
5 боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?

А. В. Шаповалов