ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2009 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко — не обязательно поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него любую часть поровну в остальные кувшины. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну. *Е.Н.Горинов*
6	2.	У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая — синяя, третья — красная. Он собрал из них большой куб $10\times10\times10$, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань. *М.В.Мурашкин*
6	3.	Найдите все такие натуральные числа a и b, что $(a+b^2)(b+a^2)$ является целой степенью двойки. *В.В.Произволов*
6	4.	На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба. *В.В.Произволов*
	5.	Из гирек весами 1 г, 2 г, …, N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарным весом, равным среднему весу оставшихся гирек. Докажите, что
2	а)	это можно сделать, если $N+1$ — квадрат целого числа;
7	б)	если это можно сделать, то $N+1$ — квадрат целого числа. *А.В.Шаповалов*
10	6.	На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем клеток в одном квадрате. *И.Пак, Ю.Рабинович*
14	7.	Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим. *Фольклор, предложил А.В.Шаповалов*

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2009 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
4	1. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей). *Е.Н.Горинов*
6	2. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей — прямоугольник. *А.В.Шаповалов*
7	3. Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке. *В.В.Произволов*
9	4. Обозначим через $[n]!$ произведение $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{11...11}_{n\text{ единиц}}$ — всего n сомножителей. Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]! \cdot [m]!$. *М.А.Берштейн*
9	5. Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны соответственно сторонам XY, YZ и ZX. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ. *Н.Белухов*
12	6. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим. *Фольклор, предложил А.В.Шаповалов*
14	7. У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка — либо головой вверх, либо головой вниз, но где как — не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру? *Л.Брагинский, Д.Фомин, П.Коган*