Двадцать восьмой турнир городов

(осенний тур, 10–11 классы, тренировочный вариант)

Решения задач

1. Ответ: xyz.

Решение 1. Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, то есть xyz.

Решение 2. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x, y, z. На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когда отрежем все. Значит на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, то есть xyz.

2. Лемма 1: центры четырех окружностей, вписанных в рассматриваемые треугольники, лежат на вписанной в четырехугольник окружности и являются серединами дуг, стягиваемых соответствующими хордами.

Доказательство: Пусть D — общая вершина сторон четырехугольника, касающихся вписанной окружности в точках K и L. Пусть M — середина дуги KL, лежащей внутри треугольника DKL. Углы MKL и MKD равны, так как опираются на равные дуги, откуда KM — биссектриса угла DKL. Аналогично LM — биссектриса угла DLK. Следовательно, M — точка пересечения биссектрис и центр вписанной в треугольник DKL окружности, ч. т. д.

Обозначим точки касания четырехугольника с вписанной окружностью как A_1, A_2, A_3, A_4 а середины дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 как B_1, B_2, B_3, B_4. Исходя из леммы 1 требуется доказать, что отрезки B_1B_3 и B_2B_4 перпендикулярны. Действительно, пусть они пересекаются в точке N. Тогда угол B_1NB_2 равен полусумме дуг B_1B_2 и B_3B_4, что равно одной четверти суммы дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1, то есть равно $360/4 = 90$ градусов, что и требовалось доказать.

3. Заметим, что среди чисел от 1 до 2006^2 все возможные остатки при делении на 4 (0, 1, 2 и 3) встречаются по 1003^2 раза. Допустим, искомые два числа не найдутся. Разобьем таблицу на 1003^2 квадрата 2×2. Любые два числа в одном квадрате имеют общую сторону или вершину. Поэтому в один квадрат не может попасть более одного числа, дающего при делении на 4 остаток 0, а также более одного числа дающего остаток 2. Но так как чисел каждого из этих видов ровно 1003^2, то в каждый квадрат попадет ровно одно число, дающее остаток 0 и ровно одно число, дающее остаток 2. В оставшихся двух клетках какого-либо квадрата не могут стоять числа, дающие остатки 1 и 3. Следовательно, количество чисел каждого из этих видов четно. Противоречие. Значит, искомые два числа найдутся, ч.т.д.

4. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии (то есть $b_{n+1} = q^n b_1$ при всех натуральных n). Если $q = 1$, то задача решена. Иначе $(b_{n+2} - b_{n+1})/(b_2 - b_1) = q^n$, откуда q — рациональное (ясно, если взять $n = 1$) и кроме того $(b_2 - b_1) \cdot q^n$ — целое число при любом натуральном n. Записывая q в виде несократимой дроби $q = s/t$, получаем, что $(b_2 - b_1)s^n/t^n$ — целое число, и значит $b_2 - b_1$ делится на t^n при любом n. Это возможно только если $t = 1$ или $t = -1$, то есть когда q — целое.

5. Ответ: да, можно.

Решение: Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб с длиной ребра 1. Отметим на ребрах AB, AD, AA_1, C_1C, C_1B_1, C_1D_1 точки M_1, M_2, ..., M_6 соответственно так, чтобы $AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = 3/4$. Тогда длины отрезков M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_4 равны $\sqrt{(3/4)^2 + (3/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$, а длины отрезков M_1M_4, M_1M_5, M_2M_4, M_2M_6, M_3M_5, M_3M_6 равны $\sqrt{(1/4)^2 + 1^2 + (1/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$. Так как длины всех двенадцати отрезков равны, то все треугольники $M_1M_2M_3$, $M_4M_5M_6$, $M_1M_4M_5$, $M_2M_4M_6$, $M_3M_5M_6$, $M_4M_1M_2$, $M_5M_1M_3$, $M_6M_2M_3$ равносторонние и точки M_1, M_2,..., M_6 являются вершинами октаэдра.